CONDIÇÕES DE KARUSH-KUHN-TUCKER (KKT)

$$P: \min f(x)$$
$$\text{s.a.} \quad h(x) = 0$$
$$g(x) \leq 0.$$

SUPOMOS QUE $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ E $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ SÃO CONTINUAMENTE DIFERENCIÁVEIS.

__TEOREMA:__ SE x^* É UM MINIMIZADOR LOCAL DE P E x^* É REGULAR, ENTÃO x^* É PONTO KKT.

OBS.:

- x^* É REGULAR SE O CONJUNTO

$$\{ \nabla h_i(x^*),\ i=1,\dots,m \ ; \ \nabla g_j(x^*),\ j \in I(x^*) \}$$

É L.I., ONDE

$$I(x^*) = \{ j \ ; \ g_j(x^*) = 0 \}.$$

- x^* É UM PONTO KKT SE EXISTEM $\lambda \in \mathbb{R}^m$ E $\mu \in \mathbb{R}^p$ TAIS QUE

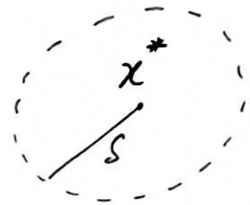
$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0$$

$$\mu_j \geq 0, \ \forall j$$

$$\mu_j g_j(x^*) = 0, \ \forall j.$$

PROVA DO TEOREMA: COMO x^* É MINIMIZADOR LOCAL DE P, ENTÃO EXISTE $\delta > 0$ TAL QUE x^* É MINIMIZADOR GLOBAL DE

$$\begin{aligned} \min \ & f(x) \\ \text{s.a.} \ & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \\ & \|x - x^*\| \leq \delta \end{aligned}$$



$f(x^*) \leq f(x)$

ASSIM, x^* É O ÚNICO MINIMIZADOR GLOBAL DE

$$\begin{aligned} \min \ & f(x) + \frac{1}{2}\|x - x^*\|^2 \\ \text{s.a.} \ & h(x) = 0, \quad g(x) \leq 0 \\ & \|x - x^*\| \leq \delta. \end{aligned}$$

APLICAMOS AGORA O MÉTODO DE PENALIZAÇÃO EXTERNA AO ÚLTIMO PROBLEMA:

$$SP(\rho): \min f(x) + \frac{1}{2}\|x - x^*\|^2 + \frac{\rho}{2}\left[\|h(x)\|^2 + \|\max\{g(x), 0\}\|^2\right]$$
$$\text{s.a. } \|x - x^*\| \leq \delta.$$

SUPOMOS $\{\rho_k\} \to \infty$. SEJA x^k O MINIMIZADOR GLOBAL DE $SP(\rho_k)$. A TEORIA DE PENALIZAÇÃO EXTERNA GARANTE QUE $\lim_{k\to\infty} x^k = x^*$. PARA TODO K SUFICIENTEMENTE GRANDE, TEMOS $\|x^k - x^*\| < \delta$. COMO x^k É MINIMIZADOR DE $SP(\rho_k)$, DEVEMOS TER, PARA TODO K SUFICIENTEMENTE GRANDE,

$$\nabla f(x^k) + (x^k - x^*) + \sum_{i=1}^{m} \left[\rho_k h_i(x^k)\right] \nabla h_i(x^k) + \sum_{j=1}^{p} \left[\rho_k \max\{g_j(x^k), 0\}\right] \nabla g_j(x^k) = 0 .$$

$$\Rightarrow \nabla f(x^k) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k \nabla h_i(x^k) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^k \nabla g_j(x^k) = x^* - x^k , \quad (1)$$

ONDE $\lambda_i^k = \rho_k h_i(x^k)$ E $\mu_j^k = \rho_k \max\{g_j(x^k), 0\}$. DEFINAMOS

$\gamma^k = \|(\lambda^k, \mu^k)\|_\infty$.

CASO 1: $\{\gamma^k\}$ POSSUI UMA SUBSEQUÊNCIA CONVERGENTE.

NESTE CASO, EXISTEM PONTOS DE ACUMULAÇÃO λ^* E μ^* TAIS QUE, QUANDO FAZEMOS $k \to \infty$ EM (1), OBTEMOS

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* \nabla g_j(x^*) = 0 .$$

ADEMAIS, $\mu_j^k = \rho_k \max\{g_j(x^k), 0\} \geq 0 \quad (\Rightarrow \mu^* \geq 0)$

E, SE $g_j(x^*) < 0$ ENTÃO $g_j(x^k) < 0$ PARA TODO

K SUFICIENTEMENTE GRANDE, E LOGO $\mu_j^* = 0$. OU SEJA,

x^* É PONTO KKT.

CASO 2: $\{\rho^k\}$ NÃO POSSUI SUBSEQUÊNCIA CONVERGENTE.

EM PARTICULAR $\{\rho^k\} \to \infty$.

DIVIDINDO (1) POR ρ^k, OBTEMOS

$$\underbrace{\frac{\nabla f(x^k)}{\rho^k}}_{\to 0} + \sum_{i=1}^{m} \left(\underbrace{\frac{\lambda_i^k}{\rho^k}}\right) \nabla h_i(x^k) + \sum_{j=1}^{p} \left(\underbrace{\frac{\mu_j^k}{\rho^k}}\right) \nabla g_j(x^k) = \underbrace{\frac{x^* - x^k}{\rho^k}}_{\to 0} .$$

PELA DEFINIÇÃO DE ρ^k, AS SEQUÊNCIAS

$$\left\{ \frac{\lambda_i^k}{\rho^k} \right\} \quad \text{E} \quad \left\{ \frac{\mu_j^k}{\rho^k} \right\}$$

SÃO LIMITADAS. MAIS AINDA, É POSSÍVEL EXTRAIR UMA SUBSEQUÊNCIA ONDE TODAS ELAS CONVERGEM, DIGAMOS, PARA λ_i^* E μ_j^*. ASSIM TEMOS

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* \nabla g_j(x^*) = 0 .$$

NOVAMENTE PELA DEFINIÇÃO DE μ^k, PELO MENOS UM DESSES λ^* OU μ^* É NÃO NULO. OBSERVE QUE AQUI $\mu_j^k = \rho_k \max\{g_j(x^*), 0\} = 0$ PARA TODO K GRANDE SEMPRE QUE $g_j(x^*) < 0$. CONCLUÍMOS QUE OS GRADIENTES DE RESTRIÇÕES ATIVAS SÃO L.D.'S. ISTO É, x^* NÃO É REGULAR, CONTRARIANDO A HIPÓTESE. $\blacksquare$