LAGRANGEANO AUMENTADO

$P:$ $\min f(x)$

$\quad$ s.a. $h(x)=0$, $g(x)\leq 0$

OBJETIVO: EVITAR O CRESCIMENTO DE ρ

1) PENALIZAÇÃO COM DESLOCAMENTO

2) CONTROLE DE ADMISSIBILIDADE.

AGORA TEMOS ESTIMATIVAS λ E μ PARA OS MULTIPLICADORES DADAS PELO MÉTODO, QUEREMOS CONTROLAR OS PRODUTOS

$$\mu_j^k g_j(x^k)$$

ALÉM DA VIABILIDADE.

DEFINIMOS

$$V_j^k = \min\{-g_j(x^k), \bar{\mu}_j^k\}, \quad \forall j.$$

OBSERVE QUE

$$V_j^k = 0 \iff g_j(x^k) \leq 0 \quad \text{E} \quad \bar{\mu}_j^k \, g_j(x^k) = 0.$$

(CONSIDERANDO QUE NO MÉTODO JÁ TEMOS $\bar{\mu}_j^k \geq 0$).

CONTROLE DE ADMISSIBILIDADE + COMPLEMENTARIDADE:

SE

$$\max\{\|h(x^k)\|_\infty, \|V^k\|_\infty\} \leq \tau \max\{\|h(x^{k-1})\|_\infty, \|V^{k-1}\|_\infty\}$$

ENTÃO $\rho_{k+1} = \rho_k$. CASO CONTRÁRIO, $\rho_{k+1} = \gamma \rho_k$. ($\tau \in [0,1)$ E $\gamma > 1$).

CRITÉRIO DE PARADA

QUEREMOS KKT DE P... VAMOS PARAR QUANDO x^k É KKT APROXIMADO:

$$\left\| \nabla f(x^k) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k \nabla h_i(x^k) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^k \nabla g_j(x^k) \right\| \leq \varepsilon_{opt}$$

$$\|h(x^k)\| \leq \varepsilon_{feas}, \quad \|g(x^k)_+\| \leq \varepsilon_{feas}$$

$$\left| \min\{-g_j(x^k), \mu_j^k\} \right| \leq \varepsilon_{comp}$$

AQUI, $\mu_j^k \geq 0$ E OS ε'S SÃO PEQUENOS.

(ε_{opt}, ε_{feas}, ε_{comp} ESTÃO EM ALGENCAN).

SUBPROBLEMA

$$SP(\rho_k, \bar{\lambda}_k, \bar{\mu}_k) : \min_x L_\rho(x, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) = f(x) + \frac{\rho_k}{2}\left[\left\| h(x^k) + \frac{\bar{\lambda}^k}{\rho_k} \right\|^2 + \left\| \left(g(x) + \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_k} \right)_+ \right\|^2 \right]$$

CRITÉRIO DE PARADA DE SP :

$$\| \nabla L_\rho(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) \| \leq \varepsilon_k .$$

LAGRANGEANO AUMENTADO (COMPLETO) — ALGENCAN

PARÂMETROS: $\tau \in [0,1)$, $\gamma > 1$, $\lambda_{min} < \lambda_{max}$, $\mu_{max} > 0$,

$\rho_0 > 0$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\bar{\lambda}_i^0 \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$, $\forall i$, $\bar{\mu}_j^0 \in [0, \mu_{max}]$, $\forall j$

FAZER $k = 0$

CRITÉRIO DE PARADA SATISFEITO?

SIM → PARE com x^k

NÃO ↓

RESOLVA APROXIMADAMENTE O SUBPROBLEMA $SP(\rho_k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)$:

x^k É TAL QUE $\|\nabla L_\rho(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)\| \leq \varepsilon_k$

ESTIME NOVOS MULTIPLICADORES

$$\lambda^{k+1} = \bar{\lambda}^k + \rho_k h(x^k) \quad \text{E} \quad \mu^{k+1} = \left(\bar{\mu}^k + \rho_k g(x^k)\right)_+$$

PROJETE λ^{k+1} E μ^{k+1} OBTENDO $\bar{\lambda}^{k+1}$ E $\bar{\mu}^{k+1}$

SE $k=0$ OU

$$\text{máx}\{\|h(x^k)\|_\infty, \|V^k\|_\infty\} \leq \tau \, \text{máx}\{\|h(x^{k-1})\|_\infty, \|V^{k-1}\|_\infty\},$$

FAÇA $\rho_{k+1} = \rho_k$.

CASO CONTRÁRIO, FAÇA $\rho_{k+1} = \gamma \rho_k$

$k \leftarrow k+1$

OBS.: A PRECISÃO ε_k PARA O SUBPROBLEMA DEVE TENDER À ZERO.

CONVERGÊNCIA A PONTOS KKT

OBJETIVO: MOSTRAR QUE O MÉTODO DE L.A. É CAPAZ DE ENCONTRAR PONTOS KKT DE P.

VAMOS "ESQUECER" O CRITÉRIO DE PARADA, E CONSIDERAR QUE O MÉTODO "GERA" UMA SEQUÊNCIA INFINITA $\{x^k\}$.

QUEREMOS SABER SE UM PONTO DE ACUMULAÇÃO x^* DE $\{x^k\}$ É KKT.

1) O MÉTODO CUMPRE A COMPLEMENTARIDADE $\mu_j g_j(x) = 0$:

<u>TEOREMA</u>: SEJA $\{x^k\}$ A SEQUÊNCIA GERADA PELO MÉTODO E x^* UM PONTO DE ACUMULAÇÃO SEU. SE $g_j(x^*) < 0$ ENTÃO

$$\mu_j^{k+1} = \left(\bar{\mu}_j^k + \rho_k\, g_j(x^k)\right)_+ = 0,$$

PARA TODO K SUFICIENTEMENTE GRANDE $(\forall k \gg 1)$.

PROVA:

<u>CASO 1</u>: $\rho_k \to \infty$.

COMO $\{\bar{\mu}^k\}$ É LIMITADA $\left(\bar{\mu}^k \in [0, \mu_{max}]\right)$ E COMO

$$g_j(x^k) \leq \frac{g_j(x^*)}{2} < 0 \quad , \quad \forall k \gg 1 \, ,$$ TEMOS

$$\bar{\mu}_j^k + \rho_k g_j(x^k) \leq \bar{\mu}_j^k + \frac{\rho_k}{2} g_j(x^*) \longrightarrow -\infty \, .$$

ASSIM, $\mu^{k+1} = \left(\bar{\mu}_j^k + \rho_k g_j(x^k)\right)_+ = 0 \, , \; \forall k \gg 1 \, .$

<u>CASO 2</u>: $\{\rho_k\}$ É LIMITADA.

NESTE CASO, O CONTROLE DE ADMISSIBILIDADE DEU CERTO $\forall k \gg 1$. EM PARTICULAR, $\|V^{k-1}\|_\infty \leq \tau \|V^k\|_\infty \, , \forall k \gg 1$, E LOGO $V^k \to 0$ DADO QUE $\tau < 1$. LEMBRANDO QUE

$$V_j^k = \min\{-g_j(x^k), \bar{\mu}_j^k\} \, ,$$ TEMOS $\bar{\mu}_j^k \to 0$. DAÍ,

$$\bar{\mu}_j^k + \rho_k g_j(x^k) < 0 \, , \; \forall k \gg 1 \implies \mu_j^{k+1} = 0 \, , \; \forall k \gg 1$$ $\blacksquare$

O MÉTODO DE L.A. ENCONTRA

- PONTOS KKT DE P SE x^* É VIÁVEL.
- PONTOS KKT DA INVIABILIDADE.

ESPECIFICAMENTE:

<u>TEOREMA</u>: SEJAM $\{x^k\}$ UMA SEQUÊNCIA GERADA PELO MÉTODO, E x^* UM PONTO DE ACUMULAÇÃO.

(a) SE x^* FOR VIÁVEL PARA P E <u>REGULAR</u>, ENTÃO x^* É PONTO KKT DE P.

(b) x^* É PONTO KKT DO PROBLEMA DA INVIABILIDADE $\min\limits_{x} \|h(x)\|^2 + \|g(x)_+\|^2$

PROVA:

(a) O MÉTODO RESOLVE SUBPROBLEMAS

$$SP(\rho_k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k): \min_x f(x) + \frac{\rho_k}{2}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\bar{\lambda}_i^k}{\rho_k} + h_i(x)\right)^2 + \sum_{j=1}^{p}\left(\frac{\bar{\mu}_j^k}{\rho_k} + g_j(x)\right)_+^2\right].$$

OU SEJA, A SEQUÊNCIA GERADA $\{x^k\}$ SATISFAZ

$$\left\| \nabla f(x^k) + \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\bar{\lambda}_i^k + \rho_k h_i(x^k)\right)}_{\lambda^{k+1}} \nabla h_i(x^k) + \sum_{j=1}^{p} \underbrace{\left(\bar{\mu}_j^k + \rho_k g_j(x^k)\right)_+}_{\mu^{k+1}} \nabla g_j(x^k) \right\| \leq \varepsilon_k \downarrow 0$$

(1)

ASSIM, A SOMA NA NORMA TENDE A ZERO.

VAMOS ARGUMENTAR QUE AS ESTIMATIVAS $\{(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1})\}$ SÃO LIMITADAS. DE FATO, DEFINIMOS

$$\delta^{k+1} = \|(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1})\|_\infty, \quad \forall k.$$

SUPOMOS POR CONTRADIÇÃO QUE $\delta^{k+1} \longrightarrow \infty$. DIVIDINDO (1) POR δ^{k+1}, OBTEMOS

$$\underbrace{\frac{\nabla f(x^k)}{\delta^{k+1}}}_{\to 0} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda^{k+1}}{\delta^{k+1}} \nabla h_i(x^k) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\mu^{k+1}}{\delta^{k+1}} \nabla g_j(x^k) \longrightarrow 0.$$

PELA DEFINIÇÃO DE δ^{k+1}, CONSEGUIMOS EXTRAIR UMA SUBSEQUÊNCIA COM ÍNDICES EM $K \subset \mathbb{N}$, TAL QUE

$$\left\{\frac{\lambda_i^{k+1}}{\delta^{k+1}}\right\}_{k\in K} \to 1 \quad \text{PARA ALGUM } i$$

OU $$\left\{\frac{\mu_j^{k+1}}{\delta^{k+1}}\right\}_{k\in K} \to 1 \quad \text{PARA ALGUM } j$$

OBSERVE QUE PELO TEOREMA ANTERIOR, ESSES TAIS j'S, SE EXISTIREM, SÃO TAIS QUE $g_j(x^*) = 0$.

PASSANDO O LIMITE, OBTEMOS ENTÃO

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum_{j:\, g_j(x^*)=0} \mu_j^* \nabla g_j(x^*) = 0,$$

ONDE PELO MENOS UM DOS TERMOS λ_i^* OU μ_j^* SÃO 1.

MAS ISSO CONTRARIA O FATO DE x^* SER REGULAR.

LOGO $\{\delta^{k+1}\}$ É LIMITADA.

COMO $\{\delta^{k+1}\}$ É LIMITADA, AS SEQUÊNCIAS $\{\lambda_i^{k+1}\}$ E $\{\mu_j^{k+1}\}$ POSSUEM PONTOS DE ACUMULAÇÃO, DIGAMOS

$$\lambda_i^* = \lim_{k \in K'} \lambda_i^{k+1}, \ \forall i, \quad \mu_j^* = \lim_{k \in K'} \mu_j^{k+1}, \ \forall j.$$

PASSANDO O LIMITE EM (1), OBTEMOS

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* \nabla g_j(x^*) = 0$$

DO TEOREMA ANTERIOR, $\mu_j^{k+1} = 0 \ \forall k \gg 1$ SEMPRE QUE $g_j(x^*) < 0$.

ASSIM, $\mu_j^* = 0$ SEMPRE QUE $g_j(x^*) < 0$. OU SEJA, x^* É KKT.

(b) QUEREMOS PROVAR QUE, EM GERAL, x^* É KKT DE

$$\min_x \|h(x)\|^2 + \|g(x)_+\|^2 .$$

CASO 1: $\{\rho_k\}$ É LIMITADA.

NESTE CASO, O TESTE DE ADMISSIBILIDADE DEU CERTO $\forall k \gg 1$. ISTO É,

$$\max\{\|h(x^{k-1})\|_\infty, \|V^{k-1}\|_\infty\} \leq \tau \max\{\|h(x^k)\|_\infty, \|V^k\|_\infty\},$$

$\forall k \gg 1$, ONDE $\tau < 1$ E

$$V_j^k = \min\{\bar{\mu}_j^k, -g_j(x^k)\}.$$

EM PARTICULAR,

$$\lim_{k} \| h(x^k) \|_\infty = 0 ,$$

OU SEJA, $h(x^*) = 0$. TAMBÉM,

$$\lim_{k} \| V^k \|_\infty = 0 .$$

SE $g_j(x^*) > 0$ ENTÃO

$$g_j(x^k) \geq \frac{g_j(x^*)}{2} > 0 \quad , \forall k \gg 1 .$$

DAÍ,

$$V_j^k \leq -g_j(x^k) \leq -\frac{g_j(x^*)}{2} < 0 \, , \forall k \gg 1 .$$

DESTA FORMA TERÍAMOS $V_j^k \not\geq 0$, UM ABSURDO. CONCLUÍMOS ASSIM QUE $g_j(x^*) \leq 0$. OU SEJA, x^* É VIÁVEL.

NESTE CASO, x^* É MINIMIZADOR GLOBAL DE

$$\min \|h(x)\|^2 + \|g(x)_+\|^2,$$

E LOGO É KKT DESTE PROBLEMA.

CASO 2: $\rho_k \to \infty$.

DO MÉTODO,

$$\nabla f(x^k) + \sum_{i=1}^{m} (\bar{\lambda}^k + \rho_k h_i(x^k)) \nabla h_i(x^k) + \sum_{j=1}^{p} (\bar{\mu}^k + \rho_k g_j(x^k))_+ \nabla g_j(x^k) \longrightarrow 0$$

DIVIDINDO POR ρ_k E PASSANDO O LIMITE,

$$\sum_{i=1}^{m} 2 h_i(x^*) \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} 2 g_j(x^*)_+ \nabla g_j(x^*) = 0$$

OU SEJA, O GRADIENTE DA F.O.

$$\|h(x)\|^2 + \|g(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{m} (h_i(x))^2 + \sum_{j=1}^{p} (g_j(x))_+^2$$

SE ANULA EM x^* (x^* É KKT DESTE PROBLEMA) ∎