

PENALIZAÇÃO INTERNA / MÉTODO DE BARREIRAS / PONTOS INTERIORES.

REFERÊNCIA: MARTÍNEZ, SANTOS. MÉTODOS COMPUTACIONAIS DE OTIMIZAÇÃO, UNICAMP. (VER LINK NA PÁGINA DA DISCIPLINA).

$$P: \min f(x)$$
$$\text{s.a. } g(x) \geq 0,$$

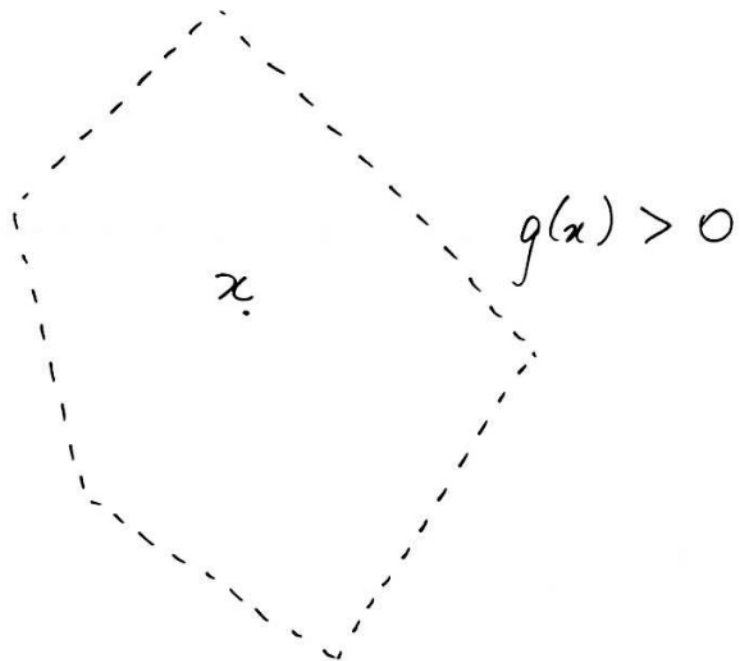
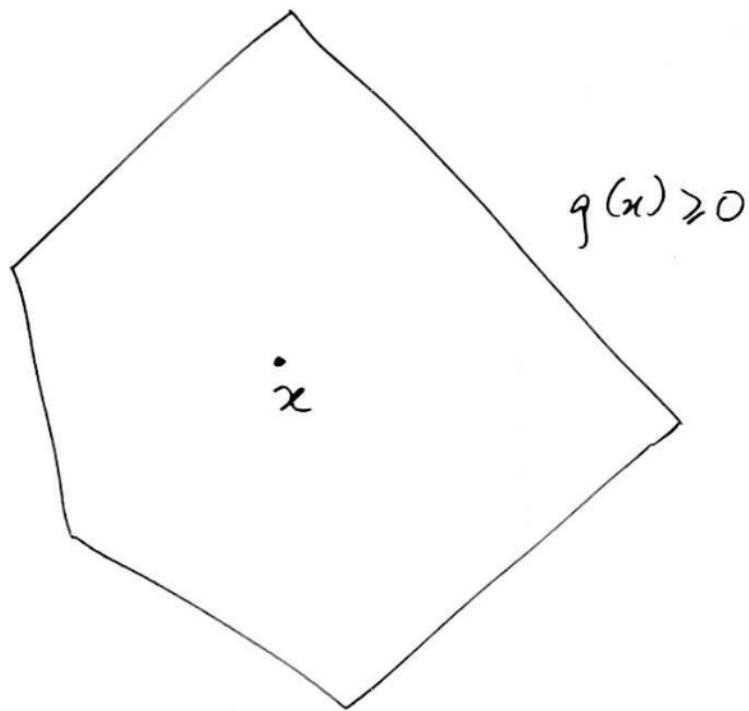
$$x \in D, \quad D \subset \mathbb{R}^n \text{ É COMPACTO.}$$

OBS.: AS RESTRIÇÕES $g(x) \geq 0$ PODEM SER EXPRESSAS NA FORMA PADRÃO $-g(x) \leq 0$.

CONJUNTO VIÁVEL: $\Omega = \{x \in \mathcal{D}; g(x) \geq 0\}$.

INTERIOR (RELATIVO): $\Omega^\circ = \{x \in \mathcal{D}; g(x) > 0\}$.

↳ DESCARTA A FRONTEIRA $g(x) = 0$.



HIPÓTESE: $\Omega^\circ \neq \emptyset$.

IDEIA: RESOLVER UMA SEQUÊNCIA DE SUBPROBLEMAS ONDE A "VIABILIDADE ESTRITA" É PENALIZADA.

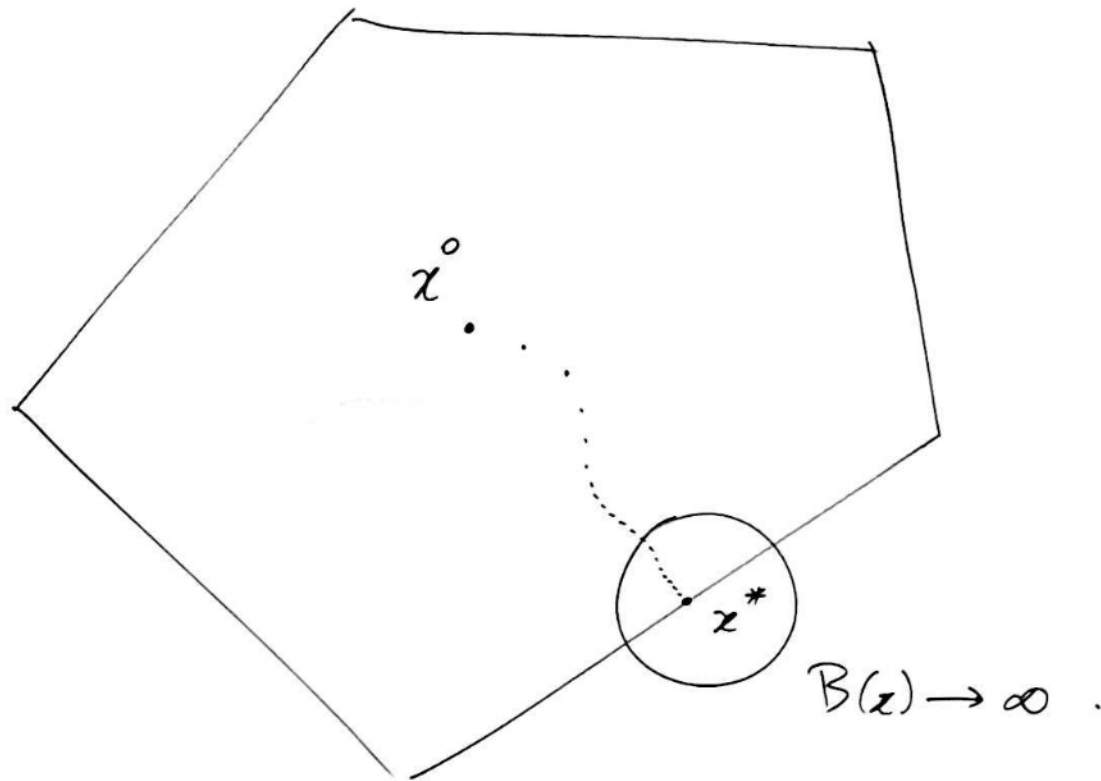
OU SEJA, OBRIGAMOS NO INÍCIO QUE x^0 ESTEJA "NO MEIO" DO CONJUNTO Ω^0 E AO LONGO DO PROCESSO AFROUXAMOS ESSA EXIGÊNCIA, PERMITINDO QUE x^k SE APROXIME DA FRONTEIRA DE Ω^0 .

UMA FUNÇÃO $B(x)$ QUE FAZ ESSE TRABALHO É TAL QUE

(i) ESTÁ DEFINIDA EM Ω^0 .

(ii) $B(x) \geq 0$, $\forall x \in \Omega^0$

(iii) SE $\lim_{x \rightarrow x^*} g_i(x) = 0$ PARA ALGUM i , ENTÃO $\lim_{x \rightarrow x^*} B(x) = \infty$.



B é chamada função de BARREIRA.

DAS FUNÇÕES DE BARREIRA COMUNS:

$$1) \quad B(x) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(x)} \quad (\text{BARREIRA INVERSA})$$

$$2) \quad B(x) = - \sum_{i=1}^m \log(q_i(x)). \quad (\text{BARREIRA LOGARÍTMICA})$$

ESSA É A MAIS USADA. É EMPREGADA EM PACOTES COMPUTACIONAIS COMO IPOPT (INTERIOR POINT OPTIMIZER).

VEJA QUE ESTA $B(x)$ PODE SER NEGATIVA. PORÉM, COMO $x \in \mathcal{D}$ (COMPACTO), EXISTE $M > 0$ TAL QUE

$$B(x) + M \geq 0, \quad \forall x \in \Omega^\circ.$$

SUBPROBLEMA: $SP(t_k) : \min_x f(x) + t_k B(x)$
s.a. $x \in \Omega^\circ.$, $t_k > 0.$

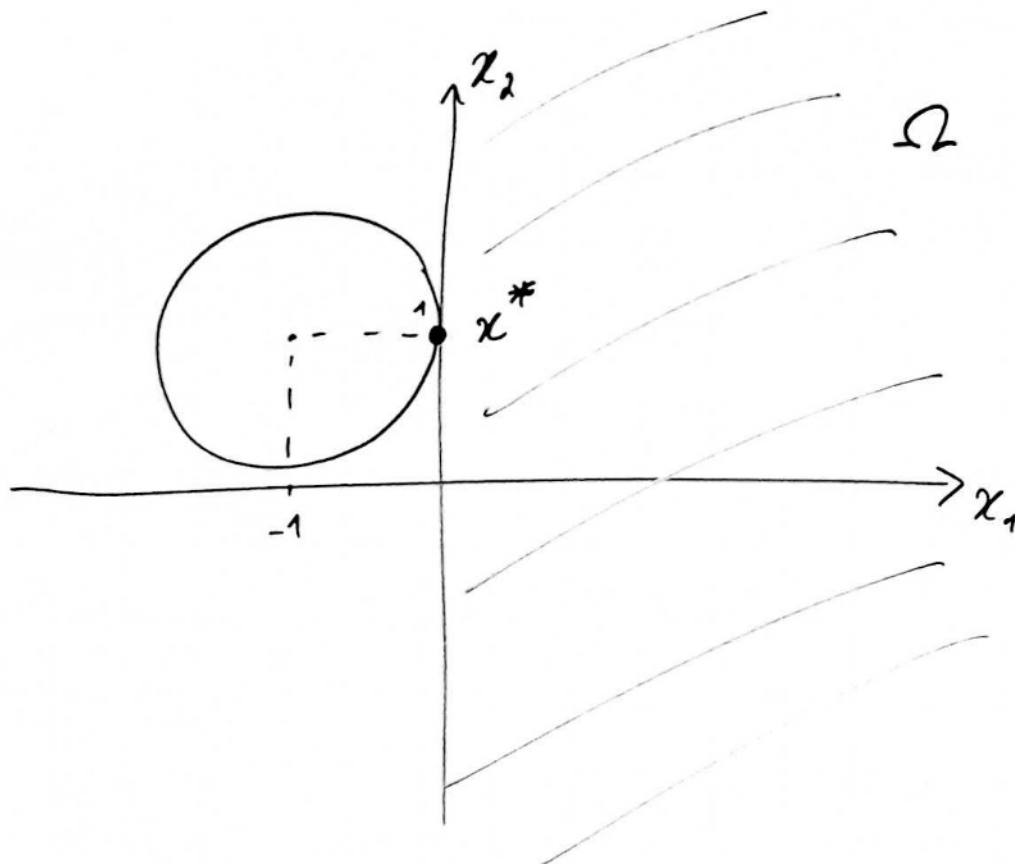
ESTRATÉGIA DE PENALIZAÇÃO INTERNA:

SEJA DADO $t_0 > 0$. FAÇA $K = 0$.

- 1) CALCULE x^K MINIMIZADOR GLOBAL DE $SP(t_K)$.
- 2) DIMINUA t_K (OU SEJA, TOME $0 < t_{K+1} < t_K$),
FAÇA $K \leftarrow K+1$ E VOLTE AO PASSO 1.

OBS.: NESSA ESTRATÉGIA, $\lim_{K \rightarrow \infty} t_K = 0$.

EXEMPLO: $P: \min_x f(x_1, x_2) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2$
s.a. $x_1 \geq 0$.



$$x^* = (0, 1).$$

SUBPROBLEMA:

$$SP(t_k): \min_x (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - t_k \ln(x_1)$$

$$\text{s.a. } x_1 > 0.$$

(t_k é fixo)

RESOLVENDO :

$$\begin{bmatrix} 2(x_1^k + 1) - t_k \frac{1}{x_1^k} \\ 2(x_2^k - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2^k = 1$$

E $2(x_1^k + 1) = \frac{t_k}{x_1^k}$. DAI' , $2(x_1^k)^2 + 2x_1^k - t_k = 0$.

$$\Delta = 4 + 8t_k$$

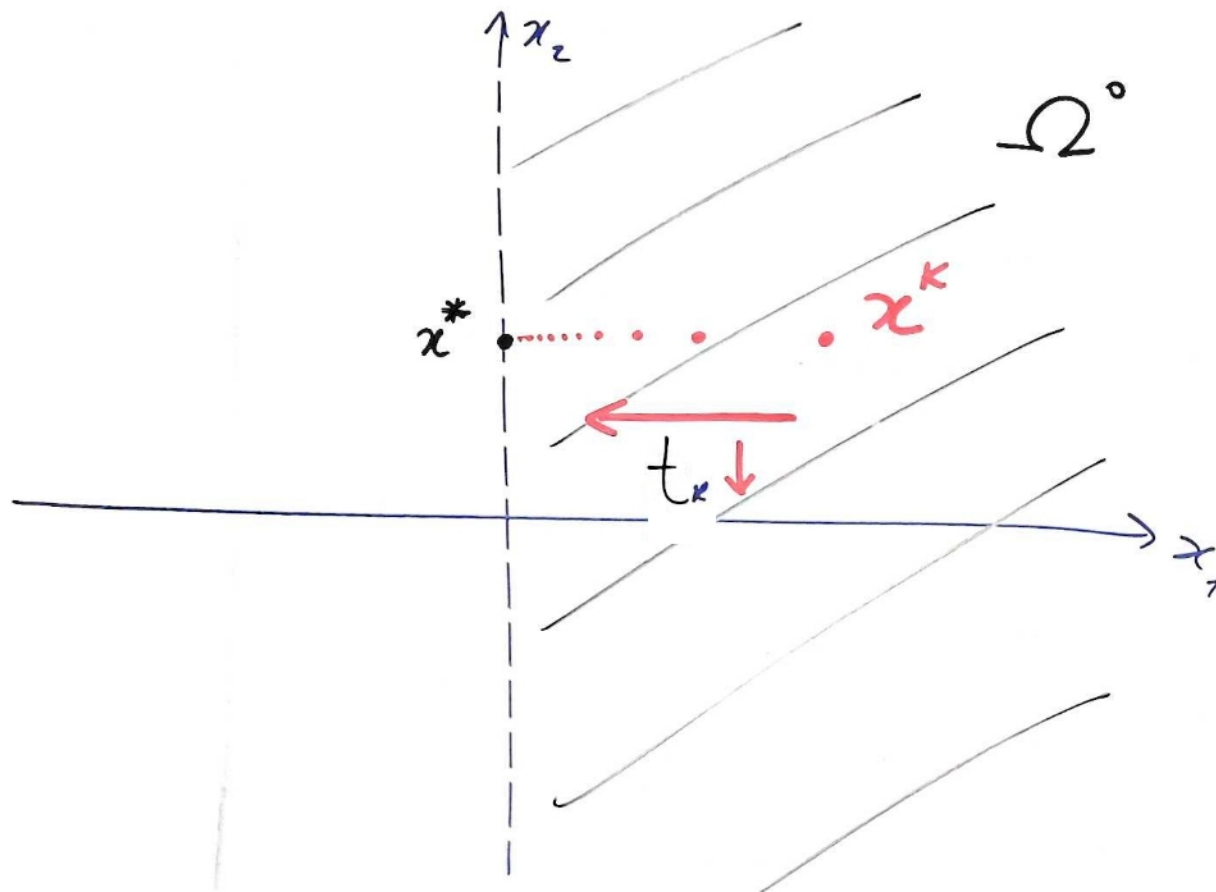
$$x_1^k = \frac{-2 + \sqrt{4 + 8t_k}}{4} > 0$$

$$x_1^k = \frac{-2 - \sqrt{4 + 8t_k}}{4} < 0 \quad (\text{NÃO SERVE})$$

Assim, o ponto crítico do subproblema é $x^k = \left(\frac{-2 + \sqrt{4 + 8t_k}}{4}, 1 \right)$.

DADO QUE A F.O. DE $SP(t_k)$ É CONVEXA, x^k É
 MINIMIZADOR GLOBAL DE $SP(t_k)$. OBSERVE QUE

$$x_k = \left(\frac{-2 + \sqrt{4 + 8t_k}}{4}, 1 \right) \rightarrow (0, 1) = x^*.$$



ASSIM COMO A PENALIZAÇÃO EXTERNA, A INTERNA
SOFRE DE INSTABILIDADE NUMÉRICA QUANDO $t_k \rightarrow 0^+$

(VEJA NO EXEMPLO QUE $t_k \rightarrow 0^+ \Rightarrow x_1^k \rightarrow 0$, E LOGO
) $\frac{t_k}{x_1^k}$ "É INSTÁVEL"). VEJA QUE A HESSIANA DA F.O.
DE $SP(t_k)$ É

$$\begin{bmatrix} 2 + \frac{t_k}{(x_1^k)^2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

SEUS AUTOVALORES SÃO $\lambda_1^k = 2 + \frac{t_k}{(x_1^k)^2}$ E $\lambda_2^k = 2$.

COMO $2(x_1^k + 1) - \frac{t_k}{x_1^k} \rightarrow 0$ E $x_1^k \rightarrow 0^+$

TEMOS $\frac{t_k}{x_1^k} \rightarrow 2$ E LOGO $\frac{t_k}{(x_1^k)^2} = \frac{t_k}{x_1^k} \cdot \frac{1}{x_1^k} \rightarrow \infty$.

ASSIM $\lambda_1^k \rightarrow \infty$, E A HESSIANA FICA CADA VEZ MAIS MAL CONDICIONADA.

CURIOSAMENTE ESTE MAL CONDICIONAMENTO NAO INTERFERE NA RESOLUCAO DE PROBLEMAS LINEARES OU QUADRATICOS CONVEXOS (OU SEJA, $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x$, A SEMI-DEF. POSITIVA), SE O METODO FOR BEM IMPLEMENTADO. ISSO E IMPLEMENTADO EM PACOTES DE PL (CPLEX, GUROBI, KNITRO ETC).

CONVERGÊNCIA.

TEOREMA: SEJA $\{x^k\}$ UMA SEQUÊNCIA GERADA PELO MÉTODO, ONDE $t_k \downarrow 0$. ENTÃO TODO PONTO DE ACUMULAÇÃO x^* DE $\{x^k\}$ É MINIMIZADOR GLOBAL DO PROBLEMA ORIGINAL

$$P: \min_x f(x) \quad \text{s.a.} \quad c(x) \geq 0, x \in D.$$

PROVA: COMO $0 < t_{k+1} < t_k$ E $B(x) \geq 0, \forall x \in \Omega^0$,

ENTÃO

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) + t_{k+1} B(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + t_{k+1} B(x^k) && (x^{k+1} \text{ minimiza } SP(t_{k+1})) \\ &\leq f(x^k) + t_k B(x^k), \quad \forall k. \end{aligned}$$

DEFINIMOS

$$b^k = f(x^k) + t_k B(x^k)$$

O VALOR ÓTIMO DE $SP(t_k)$. PELO QUE ACABAMOS DE ARGUMENTAR, A SEQUÊNCIA $\{b^k\}$ É MONÓTONA NÃO-CRESCENTE. TAMBÉM,

$$b^k \geq f(x^k) \geq f^*, \quad \forall k, \quad (1)$$

ONDE f^* É O VALOR ÓTIMO DE P . OU SEJA, $\{b^k\}$ É LIMITADA INFERIORMENTE. ASSIM, EXISTE O LIMITE

$$\bar{b} = \lim_{k \rightarrow \infty} b^k.$$

AFIRMAMOS QUE $\bar{b} = f^*$. OBSERVE QUE DE (1) JÁ TEMOS

$\bar{b} \geq f^*$. SUPONHAMOS QUE $\bar{b} > f^*$. SEJA x^*

UM MINIMIZADOR GLOBAL DE P ($f(x^*) = f^*$) E TOMEMOS

$x' \in V \cap \Omega^\circ$, V VIZINHANÇA DE x^* , TAL QUE

$$f(x') < \frac{1}{2} f^* + \frac{1}{2} \bar{b}. \quad (2)$$

COMO $t_k \downarrow 0$, PARA ESTE x' FIXO, TEMOS

$$0 \leq t_k B(x') \rightarrow 0.$$

ASSIM, TEMOS

$$0 \leq t_k B(x') < \frac{1}{2} \bar{b} - \frac{1}{2} f^*, \quad \forall k \gg 1. \quad (3)$$

(NOTE QUE $\frac{1}{2} \bar{b} - \frac{1}{2} f^* = \frac{1}{2} (\bar{b} - f^*) > 0$)

SOMANDO (2) COM (3), OBTENEMOS

$$b^k \leq f(x') + t_k B(x') < \bar{b}, \quad \forall k \gg 1.$$

ASSIM,

$$\dots \leq b^{k+1} \leq b^k < \bar{b}, \quad \forall k \gg 1,$$

E LOGO $\bar{b} > \lim_k b^k$, UM ABSURDO. CONCLUÍMOS
ASSIM QUE $\bar{b} = f^*$.

CONSIDEREMOS AGORA x^* PONTO DE ACUMULAÇÃO DE
 $\{x^k\}_{k \in K}$. TEMOS

$$0 = \lim_{k \in K} (b^k - \bar{b}) = \lim_{k \in K} [f(x^k) + t_k B(x^k) - f^*]$$

$$= \lim_{k \in K} \left[\underbrace{(f(x^k) - f^*)}_{\geq 0} + \underbrace{t_k B(x^k)}_{\geq 0} \right]$$

$$\Rightarrow f(x^*) = \lim_{k \in K} f(x^k) = f^* .$$

OU SEJA, x^* É MINIMIZADOR GLOBAL DE P . $\square$