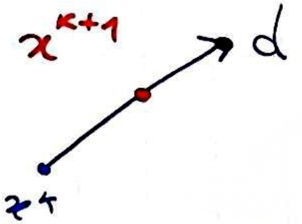
ESTRATÉGIA DE REGIÕES DE CONFIANÇA.

REFS:

1) RIBEIRO, KARAZ. OTIMIZAÇÃO CONTÍNUA. CENGAGE. 2013.

2) MARTÍNEZ, SANTOS. MÉTODOS COMPUTACIONAIS DE OTIMIZAÇÃO.

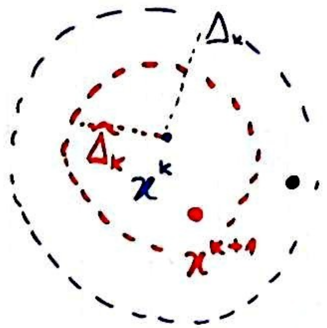
ESTRATÉGIA DE BUSCA LINEAR



(i) CALCULAR DIREÇÃO d

(ii) BUSCA LINEAR: PROCURA x^{k+1} AO LONGO DE d.

ESTRATÉGIA DE REGIÕES DE CONFIANÇA



(i) BUSCO UM PONTO QUE DIMINUA UM MODELO SIMPLIFICADO DO PROBLEMA ORIGINAL, RESTRITO A UMA VIZINHANÇA DE x^k.

(ii) SE O PONTO FOI REJEITADO, REDUZO A VIZINHANÇA.

A ESTRATÉGIA DE REGIÕES DE CONFIANÇA PERMITE TENTAR MINIMIZAR f EM <u>TODAS</u> AS DIREÇÕES A PARTIR DE x^k.

POR OUTRO LADO, O CÁLCULO DE x^{k+1} É MAIS CUSTOSO QUE A BUSCA LINEAR. A IDEIA É TROCAR O PROBLEMA ORIGINAL POR UM MODELO SIMPLIFICADO.

<u>PROBLEMA IRRESTRITO</u>:

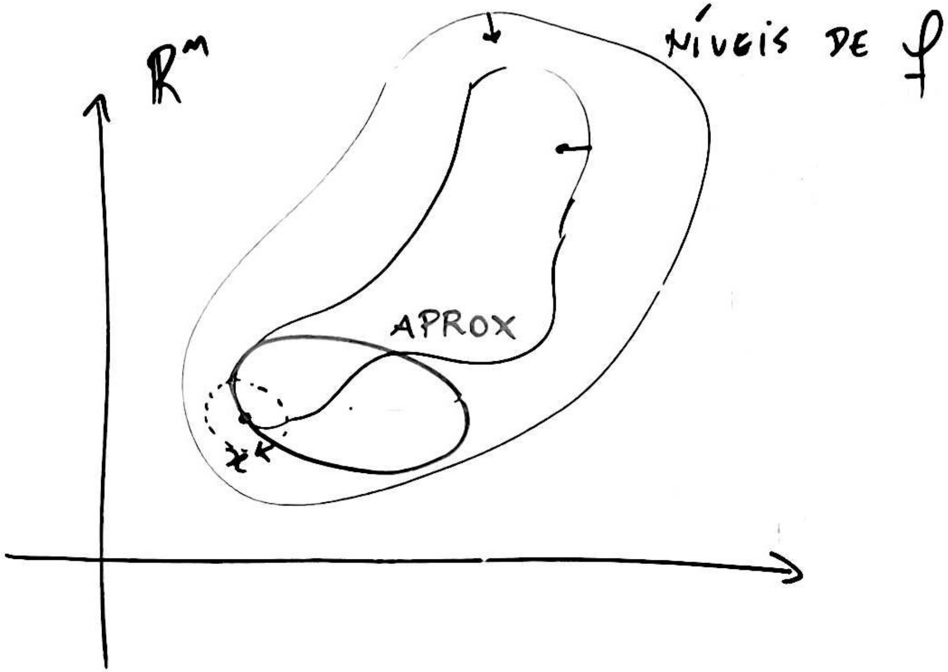
$$\begin{aligned} &\min \ f(x) \\ &\text{s.a.} \ x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

<u>MODELO SIMPLIFICADO</u>: SUPONHA f DE CLASSE C^2, OU SEJA, f TEM 2ª DERIVADAS CONTÍNUAS.

APROXIMAÇÃO DE TAYLOR DE 2ª ORDEM (AO REDOR DE x^k):

$$f(x) \approx f(x^k) + \nabla f(x^k)^t (x - x^k) + \frac{1}{2}(x-x^k)^t \nabla^2 f(x^k)(x-x^k)$$

$(x \approx x^k)$.



$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.a.} & x \in \mathbb{R}^n \end{array} \xrightarrow{x^k \text{ FIXO}} \begin{array}{ll} \min & m(d) \\ \text{s.a.} & \|d\| \leq \Delta_k \end{array}$$

ONDE

$$m(d) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^t d + \frac{1}{2} d^t B_k d$$

E

$$d = x - x^k .$$

CASO f "REDUZA", DAMOS O PASSO "COMPLETO" NA DIREÇÃO d CALCULADA PELO MODELO:

$$x^{k+1} = x^k + d^k .$$

- O MODELO QUADRÁTICO <u>SÓ</u> É CONFIÁVEL PRÓXIMO À x^k.

OU SEJA, QUANDO $\|x - x^k\| \leq \Delta_k$ (RAIO DE CONFIANÇA).

- NO MODELO QUADRÁTICO, PODEMOS TROCAR A HESSIANA $\nabla^2 f(x^k)$ POR UMA MATRIZ B_k SEMI-DEFINIDA POSITIVA BARATA DE CALCULAR.

  * $\nabla^2 f(x^k)$ PODE NÃO SER SEMI-DEF. POSIT

    $\Longrightarrow$ MODELO QUADRÁTICO É NÃO-CONVEXO.

  * $\nabla^2 f(x^k)$ PODE SER CARA DE CALCULAR.

  * B_k (QUASE-NEWTON: <u>BFGS</u>, DFD, ...)

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.a.} & x \in \mathbb{R}^n \end{array} \xrightarrow{x^k \text{ FIXO}} \begin{array}{ll} \min & m(d) \\ \text{s.a.} & \|d\| \leq \Delta_k \end{array}$$

ONDE

$$m(d) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^t d + \frac{1}{2} d^t B_k d$$

E

$$d = x - x^k .$$

CASO f "REDUZA", DAMOS O PASSO "COMPLETO" NA DIREÇÃO d CALCULADA PELO MODELO:

$$x^{k+1} = x^k + d^k .$$

• REDUÇÃO REAL DE f:

$$ared = f(x^k) - f(x^k + d^k)$$

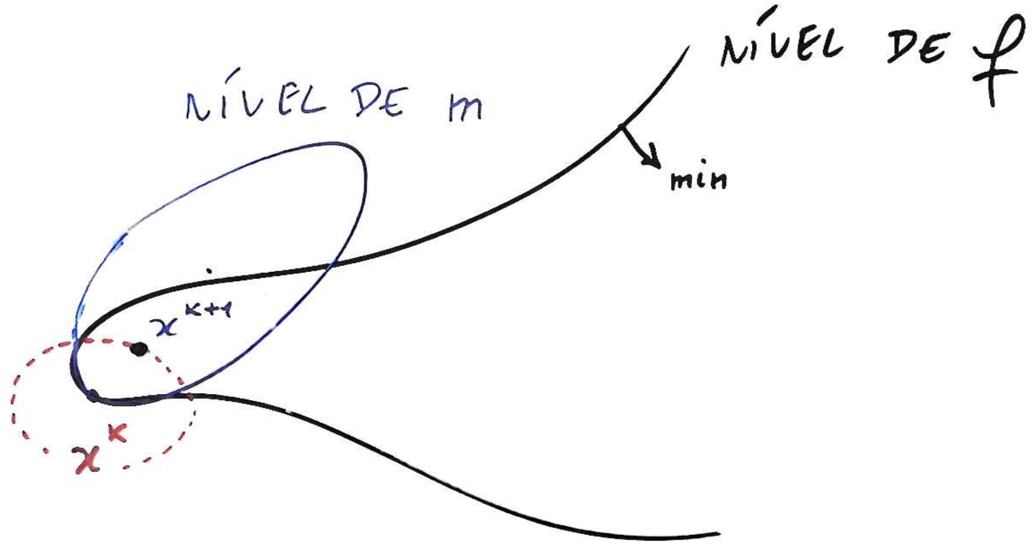
• REDUÇÃO DO MODELO (REDUÇÃO PREDITA)

$$pred = m(0) - m(d^k)$$

MEDIDA DE ACEITAÇÃO:

$$\rho_k = \frac{ared}{pred}.$$

SITUAÇÃO BOA: QUANDO a_{red} FOR GRANDE EM RELAÇÃO À p_{red}, OU SEJA, QUANDO ρ_k FOR GRANDE.



ESQUEMA DE REGIÕES DE CONFIANÇA

- DADOS $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\Delta_0 > 0$, $\eta \in [0, \frac{1}{4}]$, $k = 0$.
- REPITA ENQUANTO $\nabla f(x^k) \neq 0$
  - RESOLVA APROXIMADAMENTE O MODELO QUADRÁTICO CENTRADO EM x^k:

$$\begin{aligned} \min \quad & m(d) \\ \text{s.a.} \quad & \|d\| \leq \Delta_k \end{aligned}$$

  - OBTEMOS ASSIM UMA SOLUÇÃO d^k.

    CALCULE ρ_k.

  - SE $\rho_k > \eta$
    - $x^{k+1} = x^k + d^k$

(REDUÇÃO FOI BOA $\Longrightarrow$ ACEITO O PONTO)

SENÃO

$\hookrightarrow x^{k+1} = x^k$ (REDUÇÃO RUIM $\Rightarrow$ NÃO REALIZO O PASSO)

$\rightarrow$ SE $\rho_k < 1/4$

$\hookrightarrow \Delta_{k+1} = \frac{1}{2}\Delta_k$

REDUÇÃO RUIM $\Rightarrow$ MODELO NÃO É BOM $\Rightarrow$ REDUZO O RAIO

SENÃO

$\hookrightarrow$ SE $\rho_k > 3/4$ E $\|d\| = \Delta_k$

$\hookrightarrow \Delta_{k+1} = 2\Delta_k$

REDUÇÃO MUITO BOA E O MODELO ALCANÇOU A BORDA $\Rightarrow$ SE O RAIO FOSSE MAIOR, TALVEZ HOUVESSE MAIOR REDUÇÃO.

SENÃO

$\hookrightarrow \Delta_{k+1} = \Delta_k$

$\hookrightarrow$ CASO CONTRÁRIO, O RAIO É BOM.

$\hookrightarrow k \leftarrow k+1$

COMO RESOLVER O MODELO QUADRÁTICO

$$\min \; m(d)$$
$$\text{s.a.} \; \|d\| \leq \Delta_k .$$

1°) APLICAR UM MÉTODO DE DESCIDA (POR EX. COM DIREÇÕES $-\nabla m$).

2°) APLICAR GRADIENTES CONJUGADOS PARA RESOLVER

$$\min \; m(d)$$
$$\text{s.a.} \; d \in \mathbb{R}^n .$$

SE A SOLUÇÃO d^k SATISFAZER $\|d^k\| \leq \Delta_k$, ACEITE. CASO CONTRÁRIO, USE A ESTRATÉGIA 1.

3°) MÉTODO DOG-LEG: CONSISTE NA COMBINAÇÃO DAS DIRE-

ÇÕES $-\nabla m$ COM A DIREÇÃO DE NEWTON.

<u>DETALHES</u>: VEJA A REF. 1.