que o sistema de equações correspondente à forma escalonada reduzida por linhas da matriz aumentada terá a forma

$$\begin{aligned} \cdots x_{k_1} \qquad\qquad & + \Sigma(\ ) = 0 \\ \cdots x_{k_2} \qquad & + \Sigma(\ ) = 0 \\ \cdots \ddots \qquad & \quad \vdots \\ x_{k_r} & + \Sigma(\ ) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

onde $x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_r}$ são as variáveis líderes e $\Sigma(\ )$ denota as somas (possivelmente todas distintas) que envolvem as $n - r$ variáveis livres [compare o sistema (3) com o sistema (2) acima]. Resolvendo para as variáveis líderes, obtemos

$$\begin{aligned} x_{k_1} &= -\Sigma(\ ) \\ x_{k_2} &= -\Sigma(\ ) \\ &\vdots \\ x_{k_r} &= -\Sigma(\ ) \end{aligned}$$

Como no Exemplo 7, podemos atribuir valores arbitrários às variáveis livres do lado direito e assim obter infinitas soluções do sistema.

Resumindo, nós temos o importante teorema a seguir.

Teorema 1.2.1

Um sistema homogêneo de equações lineares com mais incógnitas que equações tem infinitas soluções.

OBSERVAÇÃO. Note que o Teorema 1.2.1 aplica somente a sistemas homogêneos. Um sistema não-homogêneo com mais incógnitas que equações não precisa ser consistente (Exercício 28); contudo, se o sistema for consistente, terá infinitas soluções. Isto será provado mais tarde.

Soluções Computacionais de Sistemas Lineares Em aplicações não é incomum encontrar sistemas lineares grandes que precisam ser resolvidos por computador. A maioria dos algoritmos computacionais para resolver estes sistemas são baseados na eliminação gaussiana ou na eliminação de Gauss-Jordan, mas os procedimentos básicos são muitas vezes modificados para comportar problemas tais como

- Redução de erros de arredondamento
- Minimização do uso de espaço de memória do computador
- Resolução do sistema com rapidez máxima

Alguns desses assuntos serão considerados no Capítulo 9. Fazendo cálculos à mão, as frações constituem um aborrecimento que muitas vezes não pode ser evitado. Contudo, em alguns casos é possível evitar as frações variando as operações elementares sobre linhas da maneira correta. Assim, uma vez que as técnicas da eliminação gaussiana e da eliminação de Gauss-Jordan tiverem sido dominadas, o leitor poderá querer variar os passos em problemas específicos para evitar frações (ver Exercício 18).

OBSERVAÇÃO. Como a eliminação de Gauss-Jordan evita o uso de retro-substituição, poderia parecer que este método é o mais eficiente dos dois métodos que nós consideramos. Pode ser argumentado que esta afirmação é verdadeira quando resolvemos manualmente sistemas pequenos, pois a eliminação de Gauss-Jordan na verdade envolve escrever menos. Contudo, mostra-se que ambos métodos requerem o mesmo número de operações. Esta é uma consideração importante quando usamos computadores para obter soluções de grandes sistemas de equações. Para maiores detalhes, o leitor pode consultar a Seção 9.8.

Conjunto de Exercícios 1.2

1. Quais das seguintes matrizes 3×3 estão em forma escalonada reduzida por linhas?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (j) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. Quais das seguintes matrizes 3×3 estão em forma escalonada?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Em cada parte, determine se a matriz está em forma escalonada, escalonada reduzida por linhas, ambas ou nenhuma das duas.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. Em cada parte, suponha que a matriz aumentada de um sistema de equações lineares foi reduzida por operações sobre linhas à forma escalonada reduzida por linhas dada. Resolva o sistema.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. Em cada parte, suponha que a matriz aumentada de um sistema de equações lineares foi reduzida por operações sobre linhas à forma escalonada dada. Resolva o sistema.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. Resolva cada um dos seguintes sistemas por eliminação de Gauss-Jordan.

(a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 &= -1 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} x - y + 2z - w &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2w &= -2 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ 3x - 3w &= -3 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} -2b + 3c &= 1 \\ 3a + 6b - 3c &= -2 \\ 6a + 6b + 3c &= 5 \end{aligned}$

7. Resolva cada um dos sistemas do Exercício 6 por eliminação gaussiana.

8. Resolva cada um dos seguintes sistemas por eliminação de Gauss-Jordan.

(a) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -15 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \\ -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 30 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} 4x_1 - 8x_2 &= 12 \\ 3x_1 - 6x_2 &= 9 \\ -2x_1 + 4x_2 &= -6 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} 10y - 4z + w &= 1 \\ x + 4y - z + w &= 2 \\ 3x + 2y + z + 2w &= 5 \\ -2x - 8y + 2z - 2w &= -4 \\ x - 6y + 3z &= 1 \end{aligned}$

9. Resolva cada um dos sistemas do Exercício 8 por eliminação gaussiana.

10. Resolva cada um dos seguintes sistemas por eliminação de Gauss-Jordan.

(a) $\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 &= 5 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} w + 2x - y &= 4 \\ x - y &= 3 \\ w + 3x - 2y &= 7 \\ 2u + 4v + w + 7x &= 7 \end{aligned}$

11. Resolva cada um dos sistemas do Exercício 10 por eliminação gaussiana.

12. Sem utilizar papel e lápis, determine quais dos seguintes sistemas homogêneos têm soluções não-triviais.

(a) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 0 \\ 7x_1 + x_2 - 8x_3 + 9x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 - 8x_3 &= 0 \\ 4x_3 &= 0 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 6x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}$

13. Reolva os seguintes sistemas homogêneos de equações lineares por qualquer método.

(a) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 \qquad &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} 2x + 2y + 4z &= 0 \\ w \qquad - y - 3z &= 0 \\ 2w + 3x + y + z &= 0 \\ -2w + x + 3y - 2z &= 0 \end{aligned}$

14. Resolva os seguintes sistemas homogêneos de equações lineares por qualquer método.

(a) $\begin{aligned} 2x - y - 3z &= 0 \\ -x + 2y - 3z &= 0 \\ x + y + 4z &= 0 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} v + 3w - 2x &= 0 \\ 2u + v - 4w + 3x &= 0 \\ 2u + 3v + 2w - x &= 0 \\ -4u - 3v + 5w - 4x &= 0 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \qquad &= 0 \\ -2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$

15. Resolva os seguintes sistemas por qualquer método.

(a) $\begin{aligned} 2I_1 - I_2 + 3I_3 + 4I_4 &= 9 \\ I_1 \qquad - 2I_3 + 7I_4 &= 11 \\ 3I_1 - 3I_2 + I_3 + 5I_4 &= 8 \\ 2I_1 + I_2 + 4I_3 + 4I_4 &= 10 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} Z_3 + Z_4 + Z_5 &= 0 \\ -Z_1 - Z_2 + 2Z_3 - 3Z_4 + Z_5 &= 0 \\ Z_1 + Z_2 - 2Z_3 \qquad - Z_5 &= 0 \\ 2Z_1 + 2Z_2 - Z_3 \qquad + Z_5 &= 0 \end{aligned}$

16. Resolva os seguintes sistemas, onde a, b e c são constantes.

(a) $\begin{aligned} 2x + y &= a \\ 3x + 6y &= b \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ 2x_1 \qquad + 2x_3 &= b \\ 3x_2 + 3x_3 &= c \end{aligned}$

17. O sistema seguinte não tem soluções para quais valores de a? Exatamente uma solução? Infinitas soluções?

$$\begin{aligned} x + 2y - \qquad 3z &= 4 \\ 3x - y + \qquad 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$$

18. Reduza

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -29 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

à forma escalonada reduzida por linhas sem introduzir quaisquer frações.

19. Obtenha duas formas escalonadas por linha diferentes de

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

20. Resolva o seguinte sistema de equações não-lineares para os ângulos incógnitos α, β e γ, onde $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$ e $0 \leq \gamma < \pi$.

$$\begin{aligned} 2\,\text{sen}\,\alpha - \cos\beta + 3\,\text{tg}\,\gamma &= 3 \\ 4\,\text{sen}\,\alpha + 2\cos\beta - 2\,\text{tg}\,\gamma &= 2 \\ 6\,\text{sen}\,\alpha - 3\cos\beta + \text{tg}\,\gamma &= 9 \end{aligned}$$

21. Mostre que o seguinte sistema não-linear tem 18 soluções se $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$ e $0 \leq \gamma < 2\pi$.

$$\begin{aligned} \text{sen}\,\alpha + 2\cos\beta + 3\,\text{tg}\,\gamma &= 0 \\ 2\,\text{sen}\,\alpha + 5\cos\beta + 3\,\text{tg}\,\gamma &= 0 \\ -\,\text{sen}\,\alpha - 5\cos\beta + 5\,\text{tg}\,\gamma &= 0 \end{aligned}$$

22. Para que valor(es) de λ o sistema de equações

$$\begin{aligned} (\lambda - 3)x + \qquad y &= 0 \\ x + (\lambda - 3)y &= 0 \end{aligned}$$

tem soluções não-triviais?

23. Resolva o sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \phantom{{}+x_3} &= \lambda x_1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= \lambda x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= \lambda x_3 \end{aligned}$$

para x_1, x_2 e x_3 nos dois casos $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$.

24. Resolva o seguinte sistema para x, y e z.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{4}{z} &= 1 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{8}{z} &= 0 \\ -\frac{1}{x} + \frac{9}{y} + \frac{10}{z} &= 5 \end{aligned}$$

25. Encontre coeficientes a, b, c e d tais que a curva mostrada na figura é o gráfico da equação $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

26. Encontre coeficientes a, b, c e d tais que a curva mostrada na figura é dada pela equação $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$.

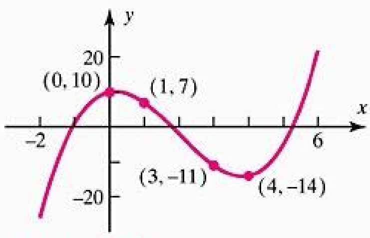

Figura Ex-25

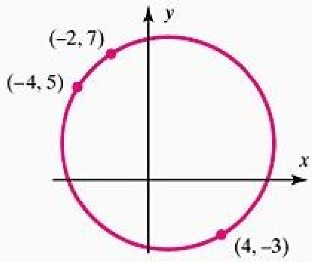

Figura Ex-26

27. (a) Mostre que se $ad - bc \neq 0$, então a forma escalonada reduzida por linhas de

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{é} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Use a parte (a) para mostrar que o sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= k \\ cx + dy &= l \end{aligned}$$

tem exatamente uma solução quando $ad - bc \neq 0$.

28. Encontre um sistema linear inconsistente que tem mais incógnitas do que equações.

Discussão e Descoberta

29. Discuta as formas escalonadas reduzidas por linhas possíveis de

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

30. Considere o sistema de equações

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \\ ex + fy &= 0 \end{aligned}$$

Discuta as posições relativas das retas $ax + by = 0$, $cx + dy = 0$ e $ex + fy = 0$ quando o sistema

(a) tem somente a solução trivial e

(b) tem soluções não-triviais.

31. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.

(a) Se uma matriz for reduzida à forma escalonada reduzida por linhas por duas seqüências distintas de operações elementares sobre linhas, então as matrizes resultantes serão diferentes.

(b) Se uma matriz for reduzida à forma escalonada por duas seqüências distintas de operações elementares sobre linhas, então as matrizes resultantes serão diferentes.