EXEMPLO 11 Traço de uma Matriz

A seguir, exemplos de matrizes e seus traços.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ $\quad$ $\operatorname{tr}(B) = -1 + 5 + 7 + 0 = 11$ ◆

Conjunto de Exercícios 1.3

1. Suponha que A, B, C, D e E sejam matrizes dos seguintes tamanhos:

A	B	C	D	E
(4×5)	(4×5)	(5×2)	(4×2)	(5×4)

Determine quais das seguintes expressões matriciais estão definidas. Para as que estão definidas, dê o tamanho da matriz resultante.

(a) BA (b) $AC + D$ (c) $AE + B$ (d) $AB + B$
(e) $E(A + B)$ (f) $E(AC)$ (g) $E^T A$ (h) $(A^T + E)D$

2. Resolva a seguinte equação matricial em termos de a, b, c e d.

$$\begin{bmatrix} a - b & b + c \\ 3d + c & 2a - 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcule os seguintes (quando possível).

(a) $D + E$ (b) $D - E$ (c) $5A$ (d) $-7C$
(e) $2B - C$ (f) $4E - 2D$ (g) $-3(D + 2E)$ (h) $A - A$
(i) $\operatorname{tr}(D)$ (j) $\operatorname{tr}(D - 3E)$ (k) $4\operatorname{tr}(7B)$ (l) $\operatorname{tr}(A)$

4. Usando as matrizes do Exercício 3, calcule os seguintes (quando possível).

(a) $2A^T + C$ (b) $D^T - E^T$ (c) $(D - E)^T$ (d) $B^T + 5C^T$
(e) $\frac{1}{2}C^T - \frac{1}{4}A$ (f) $B - B^T$ (g) $2E^T - 3D^T$ (h) $(2E^T - 3D^T)^T$

5. Usando as matrizes do Exercício 3, calcule os seguintes (quando possível).

(a) AB (b) BA (c) $(3E)D$
(e) $A(BC)$ (f) CC^T (g) $(DA)^T$
(i) $\operatorname{tr}(DD^T)$ (j) $\operatorname{tr}(4E^T - D)$ (k) $\operatorname{tr}(C^T A^T + 2E^T)$

6. Usando matrizes do Exercício 3, calcule os seguintes (quando possível).

(a) $(2D^T - E)A$ (b) $(4B)C + 2B$ (c) $(-AC)^T + 5D^T$
(d) $(BA^T - 2C)^T$ (e) $B^T(CC^T - A^T A)$ (f) $D^T E^T - (ED)^T$

7. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Use o método do Exemplo 7 para encontrar

(a) a primeira linha de AB (b) a terceira linha de AB (c) a segunda coluna de AB
(d) a primeira coluna de BA (e) a terceira linha de AA (f) a terceira coluna de AA

8. Sejam A e B as matrizes do Exercício 7.
(a) Expresse cada matriz-coluna de AB como uma combinação linear das matrizes-coluna de A.
(b) Expresse cada matriz-coluna de BA como uma combinação linear das matrizes-coluna de B.

9. Sejam

$$\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m] \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Mostre que o produto $\mathbf{y}A$ pode ser expressso como uma combinação linear das matrizes-linha de A com coeficientes escalares vindo de $\mathbf{y}$.

10. Sejam A e B as matrizes do Exercício 7.
(a) Use o resultado do Exercício 9 para expressar cada matriz-linha de $A\,B$ como uma combinação linear das matrizes-linha de B.
(b) Use o resultado do Exercício 9 para expressar cada matriz-linha de $B\,A$ como uma combinação linear das matrizes-linha de A.

11. Sejam C, D e E as matrizes do Exercício 3. Usando o mínimo possível de contas, determine a entrada na linha 2 e coluna 3 de $C\,(D\,E)$.

12. (a) Mostre que se $A\,B$ e $B\,A$ estão ambas definidas, então $A\,B$ e $B\,A$ são matrizes quadradas.
(b) Mostre que se A é uma matriz $m \times n$ e $A\,(B\,A)$ está definida, então B é uma matriz $n \times m$.

13. Em cada parte, encontre matrizes A, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ que expressem o sistema de equações lineares dado como uma única equação matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(a) $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\ 9x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} 4x_1 \qquad\quad - 3x_3 + x_4 &= 1 \\ 5x_1 + x_2 \qquad\quad - 8x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 9x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_2 - x_3 + 7x_4 &= 2 \end{aligned}$$

14. Em cada parte, expresse a equação matricial como um sistema de equações lineares.

(a) $$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(b) $$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

15. Se A e B são particionadas em submatrizes, por exemplo,

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \quad \text{e} \quad B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

então $A\,B$ pode ser expresso como

$$AB = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right]$$

sempre que os tamanhos das submatrizes de A e B são tais que as operações indicadas podem ser efetuadas. Este método de multiplicar matrizes particionadas é chamado ***multiplicação em bloco***. Em cada parte, calcule o produto usando multiplicação em bloco. Confira seus resultados multiplicando diretamente.

(a) $$A = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ \hline 7 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

(b) $$A = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 5 \\ \hline 0 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ 7 & -1 & 5 \\ \hline 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

16. Adapte o método do Exercício 15 para calcular os seguintes produtos usando multiplicação em bloco.

(a) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ \hline 2 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

(b) $$\left[\begin{array}{cc} 2 & -5 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ \hline 1 & 4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right]$$

$$\text{(c)}\quad \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 3 & 3 \\ -1 & 4 \\ 1 & 5 \\ \hline 2 & -2 \\ 1 & 6 \end{array}\right]$$

17. Em cada parte, determine se pode ser usada multiplicação em bloco para calcular $A\,B$ a partir das partições dadas. Se puder, calcule o produto usando multiplicação em bloco.

$$\text{(a)}\quad A = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right], \qquad B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ \hline 7 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

$$\text{(b)}\quad A = \left[\begin{array}{cccc} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right], \qquad B = \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ 7 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

18. (a) Mostre que se A tem uma linha de zeros e B é uma matriz qualquer para a qual o produto $A\,B$ está definido, então $A\,B$ também tem uma linha de zeros.

(b) Encontre um resultado similar valendo para uma coluna de zeros.

19. Seja A uma matriz $m \times n$ qualquer e seja 0 a matriz $m \times n$ com todas as entradas nulas. Mostre que se $k\,A = 0$, então $k = 0$ ou $A = 0$.

20. Seja I a matriz $n \times n$ cuja entrada na linha i e coluna j é

$$\begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

Mostre que $A\,I = I\,A = A$ para qualquer matriz $n \times n$ A.

21. Em cada parte, encontre uma matriz $[\,a_{ij}\,]$ de tamanho 6×6 que satisfaz a condição dada. Dê respostas tão gerais quanto possível, usando letras e não números para entradas não-nulas específicas.

(a) $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ (b) $a_{ij} = 0$ se $i > j$ (c) $a_{ij} = 0$ se $i < j$ (d) $a_{ij} = 0$ se $|\,i - j\,| > 1$

22. Encontre a matriz $[a_{ij}]$ de tamanho 4×4 cujas entradas satisfazem a condição dada.

(a) $a_{ij} = i + j$ (b) $a_{ij} = i^{j-1}$ (c) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } |i - j| > 1 \\ -1 & \text{se } |i - j| \leq 1 \end{cases}$

23. Prove: Se A e B são matrizes $n \times n$, então $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$.

Discussão e Descoberta

24. Descreva três métodos distintos para calcular um produto de matrizes e ilustre os métodos calculando algum produto $A\,B$ destas três maneiras.

25. Quantas matrizes A de tamanho 3×3 você consegue encontrar tais que

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \\ 0 \end{bmatrix}$$

para todas as escolhas de x, y e z?

26. Quantas matrizes A de tamanho 3×3 você consegue encontrar tais que

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para todas as escolhas de x, y e z?

27. Dizemos que uma matriz B é uma ***raiz quadrada*** de uma matriz A se $B\,B = A$.

(a) Encontre duas raízes quadradas de $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) Quantas raízes quadradas distintas você consegue encontrar de $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$?