$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longleftarrow$$ Nós somamos −2 vezes a primeira linha à segunda e −1 vezes a primeira à terceira.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \longleftarrow$$ Nós somamos 2 vezes a segunda linha à terceira.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \longleftarrow$$ Nós multiplicamos a terceira linha por −1.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \longleftarrow$$ Nós somamos 3 vezes a terceira linha à segunda e −3 vezes a terceira à primeira.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \longleftarrow$$ Nós somamos −2 vezes a segunda linha à primeira.

Assim,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

♦

Muitas vezes nós não sabemos, de antemão, se uma dada matriz é ou não invertível. Se uma matriz A de tamanho $n \times n$ não é invertível, então ela não pode ser reduzida a I_n por operações elementares sobre linhas [parte (*c*) do Teorema 1.5.3]. Dito de outra maneira, a forma escalonada reduzida por linhas de A tem pelo menos uma linha de zeros. Assim, se o procedimento do último exemplo for tentado em uma matriz que não é invertível, então em algum ponto das contas vai aparecer uma linha de zeros *no lado esquerdo*. Pode-se então concluir que a dada matriz não é invertível e parar as contas.

EXEMPLO 5 Mostrando que uma Matriz não É Invertível

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Aplicando o procedimento do Exemplo 4 dá

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longleftarrow$$ Nós somamos − 2 vezes a primeira linha à segunda e somamos a primeira à terceira.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \longleftarrow$$ Nós somamos a segunda linha à terceira.

Como obtivemos uma linha de zeros no lado esquerdo, A não é invertível. ♦

EXEMPLO 6 Uma Conseqüência da Invertibilidade

No Exemplo 4 nós mostramos que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

é uma matriz invertível. Do Teorema 1.5.3 segue que o sistema homogêneo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad\;\; + 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

tem somente a solução trivial. ♦

Conjunto de Exercícios 1.5

1. Quais das seguintes matrizes são elementares?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Encontre uma operação sobre linhas que retorna a matriz elementar dada a uma matriz identidade.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

Encontre matrizes elementares E_1, E_2, E_3 e E_4 tais que

(a) $E_1 A = B$ (b) $E_2 B = A$ (c) $E_3 A = C$ (d) $E_2 C = A$

4. No Exercício 3, é possível encontrar uma matriz elementar E tal que $E\,B = C$? Justifique sua resposta.

Nos Exercícios 5–7, use o método mostrado nos Exemplos 4 e 5 para encontrar a inversa da matriz dada se a matriz é invertível e confira sua resposta por multiplicação.

5. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

6. (a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

7. (a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -8 & 17 & 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & \frac{2}{5} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

8. Encontre a inversa de cada uma das seguintes matrizes 4×4, onde k_1, k_2, k_3, k_4 e k_5 são todos não-nulos.

(a) $\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$

9. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre matrizes elementares E_1 e E_2 tais que $E_2 E_1 A = I$.

(b) Escreva A^{-1} como um produto de duas matrizes elementares.

(c) Escreva A como um produto de duas matrizes elementares.

10. Em cada parte, efetue a operação sobre linhas dada na matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

multiplicando A à esquerda por uma matriz elementar conveniente. Confira sua resposta em cada caso executando a operação sobre linhas diretamente em A.

(a) Permute a primeira e terceira linhas.

(b) Multiplique a segunda linha por $\frac{1}{3}$.

(c) Some duas vezes a segunda linha à primeira.

11. Expresse a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

no formato $A = E\,F\,G\,R$, onde E, F e G são matrizes elementares e R está em forma escalonada por linhas.

12. Mostre que se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

é uma matriz elementar, então pelo menos uma entrada da terceira linha deve ser um zero.

13. Mostre que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}$$

é não-invertível para qualquer valor das entradas.

14. Prove que se A é uma matriz $m \times n$, então existe uma matriz invertível C tal que $C\,A$ está em forma escalonada reduzida por linhas.

15. Prove que se A é uma matriz invertível e B é equivalente por linhas a A, então B também é invertível.

16. (a) Prove: Se A e B são matrizes $m \times n$, então A e B são equivalentes por linhas se, e somente se, A e B têm a mesma forma escalonada reduzida por linhas.

(b) Mostre que A e B são equivalentes por linhas e encontre uma seqüência de operações elementares por linhas que produz B a partir de A, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

17. Prove o Teorema 1.5.1.

Discussão e Descoberta

18. Suponha que A é alguma matriz invertível desconhecida, mas que você conhece uma seqüência de operações elementares por linhas que produz a matriz identidade quando efetuada sucessivamente em A. Explique como você pode usar a informação disponível para encontrar A.

19. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.

(a) Toda matriz quadrada pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.

(b) O produto de duas matrizes elementares é uma matriz elementar.

(c) Se A é uma matriz invertível e um múltiplo da primeira linha de A é somado à segunda linha, então a matriz resultante é invertível.

(d) Se A é invertível e $A\,B = 0$, então é necessariamente verdade que $B = 0$.

20. Decida se a afirmação dada é sempre verdadeira ou às vezes falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.

(a) Se A é uma matriz $n \times n$ singular, então $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem infinitas soluções.

(b) Se A é uma matriz $n \times n$ singular, então a forma escalonada reduzida por linhas de A tem pelo menos uma linha de zeros.

(c) Se A^{-1} pode ser expressa como um produto de matrizes elementares, então o sistema linear homogêneo $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial.

(d) Se A é uma matriz $n \times n$ singular e B resulta da permutação de duas linhas de A, então B pode ser ou não ser singular.

21. Você acredita que existe uma matriz A de tamanho 2×2 tal que

$$A\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix}$$

para todos valores de a, b, c e d? Explique seu raciocínio.