Notas de aula – Determinantes

Dada uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ quadrada, vamos associar um número real

$$\det \mathbf{A},$$

chamado *determinante de* $\mathbf{A}$. A seguir, exibimos como calcular o determinante de matrizes de ordem ≤ 3.

Matrizes de ordem 1: À matriz $\mathbf{A} = [a_{11}]$, definimos

$$\det \mathbf{A} = a_{11}.$$

Matrizes de ordem 2: À matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, definimos

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Matrizes de ordem 3: À matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, definimos

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1}$$

Nosso objetivo é definir o determinante de uma matriz de ordem n qualquer ($n \geq 1$). Perceba que na definição do determinante de matrizes de ordem 2 e 3 ocorre uma certa regularidade: em cada produto de elementos da matriz, os termos das linhas aparecem ordenados, enquanto os termos das colunas não. Observe ainda que nos índices das colunas, todas as ordens possíveis dos números $1, 2, 3$ (ou $1, 2$ no caso de ordem 2) aparecem. O que não é muito visível por hora é como o sinal de cada produto é atribuído. O que faremos no caso geral é "estender" essa regularidade. Portanto, tenha os determinantes anteriores em mente!

Uma forma de definirmos o determinante de uma matriz qualquer é fazer um estudo minucioso de produtos do tipo

$$\pm\, a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

onde $j_1, \ldots, j_n$ são os índices das colunas em alguma ordem (uma *permutação* de $1, \ldots, n$). Essa é uma forma direta de estender a soma (1) para matrizes de ordem $n \times n$. **Porém** essa forma de apresentar o determinante não nos dá uma maneira prática de calculá-lo. Portanto, apresentaremos o determinante por meio de um método para calculá-lo: o **desenvolvimento de Laplace**.

Desenvolvimento de Laplace

Voltemos ao determinante de matrizes de ordem 2:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Observe que podemos escrever

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}\left[(-1)^{1+1}\det \mathbf{A}_{11}\right] + a_{12}\left[(-1)^{1+2}\det \mathbf{A}_{12}\right]$$

(lembre-se que o determinante de uma matriz 1×1 é o próprio elemento da matriz), onde as matrizes $\mathbf{A}_{ij}$ são obtidas da matriz $\mathbf{A}$ eliminando a linha i e a coluna j:

- $\begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{a_{11}}} & \mathbf{a_{12}} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & \boxed{\mathbf{a_{12}}} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} \end{bmatrix}$

O mesmo ocorre com o determinante de ordem 3

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Podemos escrever

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}),$$

que por sua vez pode ser escrito como

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}\left[(-1)^{1+1}\det \mathbf{A}_{11}\right] + a_{12}\left[(-1)^{1+2}\det \mathbf{A}_{12}\right] + a_{13}\left[(-1)^{1+3}\det \mathbf{A}_{13}\right],$$

onde as matrizes $\mathbf{A}_{ij}$ são obtidas de maneira análoga:

- $\begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{a_{11}}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & \boxed{\mathbf{a_{12}}} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \boxed{\mathbf{a_{13}}} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{A}_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

Observe que os sinais de cada parcela são corretamente capturados pelas potências de -1.

Note que reduzimos o cálculo de determinantes de ordem 3 em determinantes de ordem 2. Essa é uma maneira prática de calcular determinantes, já que determinantes de ordem 2 são fáceis.

Agora estenderemos essa ideia para o caso $n \times n$.

Dada uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ de ordem n, consideremos a matriz quadrada $\mathbf{A}_{ij}$ de ordem $n-1$ obtida de $\mathbf{A}$ pela retirada da linha i e da coluna j. Definimos o *cofator de a_{ij}* como o número

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}.$$

Veja que o cofator é o que aparece no que fizemos anteriormente.

Exemplo 1. Dada $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ temos

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = 6,$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = -3.$$

□

Nesse contexto, definimos o determinante de matrizes quadradas quaisquer de maneira recursiva, considerando que o determinante de matrizes de ordem 1 é igual ao próprio elemento da matriz ($\det [c] = c$).

Definição 1. *Dada uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ de ordem n, definimos o* ***determinante de A*** *como o número real*

$$\det \mathbf{A} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + \cdots + a_{1n}\Delta_{1n}.$$

Um fato importante sobre o desenvolvimento de Laplace é que o determinante por ser calculado escolhendo **qualquer** linha (e não só a primeira como da definição anterior). Pode-se ainda escolher **colunas** para desenvolver a soma de cofatores.

É o que o teorema a seguir diz (não o provaremos).

Teorema 1 (Desenvolvimento de Laplace)**.** *Dada uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ de ordem n, escolhemos uma linha qualquer k de $\mathbf{A}$. Então podemos desenvolver o determinante sobre esta linha:*

$$\det \mathbf{A} = a_{k1}\Delta_{k1} + a_{k2}\Delta_{k2} + \cdots + a_{kn}\Delta_{kn}.$$

Também, podemos escolher uma coluna qualquer p de $\mathbf{A}$, e desenvolver o determinante sobre esta coluna:

$$\det \mathbf{A} = a_{1p}\Delta_{1p} + a_{2p}\Delta_{2p} + \cdots + a_{np}\Delta_{np}.$$

Exemplo 2. Considere a matriz do exemplo anterior

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

- Escolhendo a primeira linha, temos

$$\det \mathbf{A} = 1\Delta_{11} + 2\Delta_{12} + (-1)\Delta_{13} = 0 + 12 + 3 = 15$$

(esses cofatores foram calculados no exemplo anterior).

- Escolhendo a linha 2, temos

$$\det \mathbf{A} = 0\Delta_{21} + 1\Delta_{22} + 2\Delta_{23}.$$

Como

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = 1, \qquad \Delta_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = 7,$$

temos

$$\det \mathbf{A} = 1 + 14 = 15.$$

- Escolhendo a coluna 1, temos

$$\det \mathbf{A} = 1\Delta_{11} + 0\Delta_{21} + 3\Delta_{31},$$

com

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = 0, \qquad \Delta_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 5,$$

e assim

$$\det \mathbf{A} = 0 + 15 = 15.$$

□

O leitor atento deve ter percebido o seguinte:

se podemos escolher qualquer linha ou coluna para desenvolver o determinante, é melhor escolhermos a linha/coluna que contenha mais zeros, pois desta forma, teremos que calcular menos (sub)determinantes!

É o que o exemplo a seguir ilustra.

Exemplo 3. Vamos calcular $\det \mathbf{A}$ onde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. É interessante aplicar o desenvolvimento de Laplace sobre uma linha ou coluna com mais zeros. Podemos escolher então a linha 1, que contém dois zeros. Assim,

$$\det \mathbf{A} = 1\Delta_{11} + 0\Delta_{12} + 0\Delta_{13} + (-1)\Delta_{14} = \Delta_{11} - \Delta_{14}.$$

Temos

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -14,$$

$$\Delta_{14} = (-1)^{1+4} \det \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (-1) \cdot 2 \cdot (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = -10,$$

e logo $\det \mathbf{A} = -14 + 10 = -4$.

Também podemos escolher a coluna 2, que contém 3 zeros, para escrever

$$\det \mathbf{A} = 2\Delta_{22} = 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \cdots = -4.$$

□

Atividade 1. Faça a conta pendente no exemplo anterior. Veja que ao escolher a linha 1 de $\mathbf{A}$, devemos calcular dois determinantes de ordem 3, mas com colunas contendo dois zeros... por outro lado escolhendo a coluna 2 de $\mathbf{A}$, devemos calcular apenas um determinante de ordem 3, porém com menos zeros. Qual você prefere?
Ou seja, **a escolha de qual linha/coluna usar é uma questão de bom senso!**

Casos particulares

O determinante em alguns casos pode ser calculado com mínimo esforço. Vejamos alguns exemplos:

Determinantes de matrizes com uma linha/coluna nula. Se uma matriz quadrada $\mathbf{R}$ de ordem n tem uma linha nula então $\det \mathbf{R} = 0$. De fato, digamos que tal linha seja a k. Daí,

$$\det \mathbf{R} = 0\Delta_{k1} + 0\Delta_{k2} + \cdots + 0\Delta_{kn} = 0.$$

O mesmo ocorre se $\mathbf{R}$ tem uma coluna nula: basta aplicar o desenvolvimento de Laplace sobre a tal coluna. Em particular, o determinante de uma matriz nula é zero.

Exemplo 4. $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 0$, dado que a segunda coluna é nula. □

Determinantes de matrizes triangulares. Seja

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \ldots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \ldots & t_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

uma matriz triangular superior de ordem n. Afirmamos que seu determinante é o produto $t_{11}t_{22}t_{33}\cdots t_{nn}$ dos elementos de sua diagonal. De fato, escolhendo a primeira coluna obtemos

$$\det \mathbf{T} = t_{11}\Delta_{11} = t_{11} \det \begin{bmatrix} t_{22} & t_{23} & \ldots & t_{2n} \\ 0 & t_{33} & \ldots & t_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}.$$

Agora, escolhendo a primeira coluna da submatriz de ordem $n-1$, obtemos

$$\det \mathbf{T} = t_{11}t_{22} \det \begin{bmatrix} t_{33} & \dots & t_{3n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}.$$

Continuando a escolher sucessivamente as primeiras colunas das submatrizes triangulares, obteremos, depois de n passos,

$$\det \mathbf{T} = t_{11}t_{22}t_{33}\cdots t_{nn}.$$

O mesmo ocorre vale para matrizes triangulares inferiores: basta aplicar o desenvolvimento de Laplace sobre as primeiras linhas.

Exemplo 5. $\det \begin{bmatrix} 1 & 56 & 23 & 11 \\ 0 & -2 & \frac{3}{5} & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot (-1) = 6.$ □

Determinantes de matrizes diagonais. Uma matriz diagonal é, em particular, uma matriz triangular. Portanto seu determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal. Em particular, o determinante da matriz identidade de ordem n é 1:

$$\det \mathbf{I} = 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1.$$

Determinantes e matrizes elementares

Uma outra forma de calcular determinantes é através de matrizes elementares. Iniciamos estabelecendo o determinante de cada tipo matriz elementar.

Teorema 2 (Determinantes de matrizes elementares)**.** *Temos*

(*i*) $\det \mathbf{E} = -1$ *onde* $\mathbf{E}$ *é a matriz elementar relativa à operação* $L_i \leftrightarrow L_j$ *(*$i \neq j$*);*

(*ii*) $\det \mathbf{E} = k$ *onde* $\mathbf{E}$ *é a matriz elementar relativa à operação* $L_i \to kL_i$*;*

(*iii*) $\det \mathbf{E} = 1$ *onde* $\mathbf{E}$ *é a matriz elementar relativa à operação* $L_i \to L_i + kL_j$ *(*$i \neq j$*).*

O Teorema anterior estabelece o determinante de **qualquer** matriz elementar, independentemente de sua ordem ou da escolha da operação.
Assim,

- **qualquer** matriz relativa à troca de linhas sempre terá determinante igual a -1;
- **qualquer** matriz relativa à multiplicação de uma linha por k sempre terá determinante igual a k;
- e **qualquer** matriz relativa à operações do tipo $L_i \to L_i + kL_j$ sempre terá determinante igual a 1.

Vimos anteriormente que o processo de escalonamento e a inversão de matrizes envolvem produtos por matrizes elementares. Portanto, é razoável que olhemos para o determinante do produto de matrizes.

Teorema 3. *Seja* $\mathbf{A}$ *uma matriz de ordem* n *e* $\mathbf{E}$ *uma matriz elementar também de ordem* n. *Então*

$$\det(\mathbf{EA}) = \det \mathbf{E} \cdot \det \mathbf{A}.$$

Ou seja, "o determinante do produto de uma matriz por uma elementar é o produto dos determinantes".

Atividade 2. Convença-se do teorema anterior fazendo exemplos com matrizes 3×3.

Com os dois teoremas anteriores, podemos calcular o determinante de uma matriz após realizada operações elementares sobre suas linhas. Isso pode facilitar o cálculo de alguns determinantes.

Exemplo 6. Vamos calcular $\det \mathbf{A}$ onde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ usando o histórico de operações elementares da obtenção de sua FERL.

Primeiro, calculemos a FERL de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \to 1/2 L_1]{L_3 \to L_3 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \boxed{-1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 + L_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 2L_3]{L_1 \to L_1 - 2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{L_2 \to 1/2 L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_3.$$

Interpretamos a aplicação das operações elementares como produto por matrizes elementares:

1ª oper.: $\mathbf{E}_{L_3 \to L_3 + L_2} \mathbf{A}$

2ª oper.: $\mathbf{E}_{L_1 \to \frac{1}{2} L_1} \mathbf{E}_{L_3 \to L_3 + L_2} \mathbf{A}$

3ª oper.: $\mathbf{E}_{L_2 \to L_2 + L_1} \mathbf{E}_{L_1 \to \frac{1}{2} L_1} \mathbf{E}_{L_3 \to L_3 + L_2} \mathbf{A}$

4ª oper.: $\mathbf{E}_{L_1 \to L_1 - 2L_3} \mathbf{E}_{L_2 \to L_2 + L_1} \mathbf{E}_{L_1 \to \frac{1}{2} L_1} \mathbf{E}_{L_3 \to L_3 + L_2} \mathbf{A}$

5ª oper.: $\mathbf{E}_{L_2 \to L_2 - 2L_3} \mathbf{E}_{L_1 \to L_1 - 2L_3} \mathbf{E}_{L_2 \to L_2 + L_1} \mathbf{E}_{L_1 \to \frac{1}{2} L_1} \mathbf{E}_{L_3 \to L_3 + L_2} \mathbf{A}$

6ª oper.: $\mathbf{E}_{L_2 \to \frac{1}{2} L_2} \mathbf{E}_{L_2 \to L_2 - 2L_3} \mathbf{E}_{L_1 \to L_1 - 2L_3} \mathbf{E}_{L_2 \to L_2 + L_1} \mathbf{E}_{L_1 \to \frac{1}{2} L_1} \mathbf{E}_{L_3 \to L_3 + L_2} \mathbf{A}$

7ª oper.: $\mathbf{E}_{L_2 \leftrightarrow L_3} \mathbf{E}_{L_2 \to \frac{1}{2} L_2} \mathbf{E}_{L_2 \to L_2 - 2L_3} \mathbf{E}_{L_1 \to L_1 - 2L_3} \mathbf{E}_{L_2 \to L_2 + L_1} \mathbf{E}_{L_1 \to \frac{1}{2} L_1} \mathbf{E}_{L_3 \to L_3 + L_2} \mathbf{A}$

8ª oper.: $\mathbf{E}_{L_1 \to L_1 - L_3} \mathbf{E}_{L_2 \leftrightarrow L_3} \mathbf{E}_{L_2 \to \frac{1}{2} L_2} \mathbf{E}_{L_2 \to L_2 - 2L_3} \mathbf{E}_{L_1 \to L_1 - 2L_3} \mathbf{E}_{L_2 \to L_2 + L_1} \mathbf{E}_{L_1 \to \frac{1}{2} L_1} \mathbf{E}_{L_3 \to L_3 + L_2} \mathbf{A} = \mathbf{I}_3$

Usando o Teorema 3 sucessivas vezes na última igualdade, obtemos

$$1 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \det \mathbf{A} = \det \mathbf{I}_3 \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = -4.$$

$\square$

Propriedades adicionais dos determinantes

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz de ordem n. São fatos sobre determinantes:

1. $$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^t.$$

2. $$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$$

   (o determinante do produto é o produto dos determinantes)

   Justificativa. Dividimos a prova em dois casos:

   CASO 1: AB não inversível.

   Neste caso, $\det(\mathbf{AB}) = 0$. Mais ainda, $\mathbf{A}$ ou $\mathbf{B}$ não é inversível, pois se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ fossem inversíveis então $\mathbf{AB}$ também seria com $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$. Assim, $\det \mathbf{A} = 0$ ou $\det \mathbf{B} = 0$, e temos $\det(\mathbf{AB}) = 0 = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$.

   CASO 2: AB inversível.

   Sendo $\mathbf{AB}$ inversível, $\mathbf{A}$ também é (exercício). Logo $\mathbf{A}$ é um produto de matrizes elementares $\mathbf{A} = \mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1$ (exercício) e daí

   $$\begin{aligned}\det(\mathbf{AB}) &= \det(\mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1\mathbf{B}) = \det \mathbf{E}_k \cdot \det(\mathbf{E}_{k-1} \cdots \mathbf{E}_1\mathbf{B})\\ &= \cdots = \det \mathbf{E}_k \cdots \det \mathbf{E}_1 \cdot \det \mathbf{B} = \det(\mathbf{E}_k E_{k-1}) \cdots \det \mathbf{E}_1 \cdot \det \mathbf{B}\\ &= \cdots = \det(\mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1) \cdot \det \mathbf{B} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}.\end{aligned}$$

   □

3. Se $\mathbf{A}$ é inversível então $\det \mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}}$.

   Justificativa. $1 = \det \mathbf{I} = \det(\mathbf{AA}^{-1}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{A}^{-1}$, donde segue o resultado. □

4. Se $\mathbf{A}$ tem duas linhas ou duas colunas iguais i e j $(i \neq j)$ então $\det \mathbf{A} = 0$.

   Justificativa. De fato, seja $\mathbf{E}$ a matriz elementar relativa à operação $L_i \to L_i - L_j$. Então a linha i de $\mathbf{EA}$ é nula, e logo

   $$\det \mathbf{A} = \underbrace{\det \mathbf{E}}_{1} \cdot \det \mathbf{A} = \det(\mathbf{EA}) = 0.$$

   O caso em que $\mathbf{A}$ tem duas colunas iguais segue do fato de $\mathbf{A}^t$ ter duas linhas iguais e $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^t$. □

A propriedade 3 acima tem relação com o resultado abaixo:

Teorema 4 (Inversibilidade é equivalente a determinante não nulo). *Seja* $\mathbf{A}$ *uma matriz de ordem* n. *Então* $\det \mathbf{A} \neq 0$ *se, e somente se* $\mathbf{A}$ *é inversível.*

O Teorema acima diz que uma matriz tem inversa se seu determinante é diferente de zero, e vice-versa.

Exemplo 7. Vimos no Exemplo 6 que o determinante da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

é igual a -4. Então essa matriz tem inversa. De fato, no Exemplo 6 vimos que ela é linha equivalente à identidade (isto é, sua FERL é I). Podemos usar o processo de inversão de matrizes por operações elementares para calcular sua inversa (exercício). $\square$

Demonstrações

Demonstração do Teorema 2. (i): Suponha que $\mathbf{E}$ seja a matriz elementar relativa à $L_1 \leftrightarrow L_2$. A primeira linha de $\mathbf{E}$ é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Aplicando o desenvolvimento de Laplace nesta linha, obtemos

$$\det \mathbf{E} = e_{12}\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \det \mathbf{I}_{n-1} = -1.$$

A fim de mostrar a afirmação para qualquer operação $L_i \leftrightarrow L_j$, basta aplicar sucessivamente o desenvolvimento de Laplace da primeira até a linha j. A submatriz resultante terá primeira linha no formato (2), recaindo no caso anterior.

(ii): Se $\mathbf{E}$ é a matriz elementar relativa à operação $L_i \to kL_i$, aplicamos o desenvolvimento de Laplace sobre a linha i, obtendo

$$\det \mathbf{E} = e_{ii}\Delta_{ii} = k \det \mathbf{I}_{n-1} = k.$$

(iii): Se $\mathbf{E}$ é a matriz elementar relativa à operação $L_i \to L_i + kL_j$ então a linha i de $\mathbf{E}$ é

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \underbrace{1}_{\text{coluna } i} & 0 & \cdots & 0 & \underbrace{k}_{\text{coluna } j} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o desenvolvimento de Laplace sobre esta linha i obtemos

$$\det \mathbf{E} = e_{ii}\Delta_{ii} + e_{ij}\Delta_{ij} = 1 \det \mathbf{I}_{n-1} + k \det \mathbf{E}_{ij},$$

onde a matriz $\mathbf{E}_{ij}$, de ordem $n-1$, tem a linha j nula (ao retirar a coluna j, elimina-se o 1 da linha j; faça um exemplo 4×4 e se convença disso). Portanto $\det \mathbf{E} = 1 + 0 = 1$. $\square$

Demonstração do Teorema 3. A prova é similar à do Teorema anterior. Analisamos cada tipo de operação elementar separadamente.

(i): Suponha que $\mathbf{E}$ seja a matriz elementar relativa à $L_1 \leftrightarrow L_2$. O produto $\mathbf{EA}$ troca as linhas 1 e 2 da matriz $\mathbf{A}$, ou seja, $\mathbf{EA}$ tem a forma

$$\mathbf{EA} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{12} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Sejam $\tilde{\Delta}_{ij}$'s os cofatores relativos à matriz $\mathbf{EA}$ e Δ_{ij}'s os relativos à matriz original $\mathbf{A}$. Observe que

$$\tilde{\Delta}_{1j} = (-1)^{1+j} \det \mathbf{A}_{2j} = -\Big[(-1)^{2+j} \det \mathbf{A}_{2j}\Big] = -\Delta_{2j},$$

para todo j. Assim, aplicando o desenvolvimento de Laplace sobre a linha 1 de $\mathbf{EA}$ obtemos

$$\det(\mathbf{EA}) = \sum_{j=1}^{m} a_{2j}\tilde{\Delta}_{1j} = -\sum_{j=1}^{m} a_{2j}\Delta_{2j}.$$

A última soma é o desenvolvimento de Laplace sobre a linha 2 de $\mathbf{A}$ com sinal trocado. Como $\det \mathbf{E} = -1$ (Teorema 2(i)), segue que $\det(\mathbf{EA}) = \det \mathbf{E} \cdot \det \mathbf{A}$.

A prova para uma operação $L_i \leftrightarrow L_j$ qualquer segue a mesma ideia.

(ii): Se $\mathbf{E}$ é a matriz elementar relativa à operação $L_i \to kL_i$, a linha i de $\mathbf{EA}$ estará multiplicada por k. Aplicamos o desenvolvimento de Laplace sobre esta linha i e usamos o Teorema 2(ii), obtendo

$$\det(\mathbf{EA}) = \sum_{j=1}^{m}(ka_{ij})\Delta_{ij} = k\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\Delta_{ij} = k \det \mathbf{A} = \det \mathbf{E} \cdot \det \mathbf{A}.$$

(iii): Se $\mathbf{E}$ é a matriz elementar relativa à operação $L_i \to L_i + kL_j$ então a linha i de $\mathbf{EA}$ é

$$\begin{bmatrix} a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \end{bmatrix}.$$

Aplicando o desenvolvimento de Laplace sobre esta linha i obtemos

$$\det(\mathbf{EA}) = \sum_{\ell=1}^{m}(a_{i\ell} + ka_{j\ell})\Delta_{i\ell} = \sum_{\ell=1}^{m} a_{i\ell}\Delta_{i\ell} + k\sum_{\ell=1}^{m} a_{j\ell}\Delta_{i\ell}.$$

A primeira soma do lado direito da última igualdade é o determinante de $\mathbf{A}$ desenvolvido sobre a linha i; já a segunda soma é o múltiplo k do determinante de uma matriz com duas linhas j de $\mathbf{A}$. Portanto essa soma é nula (veja a propriedade 4 no texto). Como neste caso temos $\det \mathbf{E} = 1$ (Teorema 2(iii)), concluímos que $\det(\mathbf{EA}) = \det \mathbf{A} = \det \mathbf{E} \cdot \det \mathbf{A}$. □

Demonstração do Teorema 4. Se $\mathbf{A}$ é inversível então $\mathbf{A} = \mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1$ para certas matrizes elementares $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_k$. Assim, $\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1) = \det \mathbf{E}_k \cdots \det \mathbf{E}_1 \neq 0$. Reciprocamente, se $\mathbf{A}$ não é inversível, então $\mathbf{A} = \mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_1\mathbf{R}$, onde $\mathbf{R}$ é a FERL de $\mathbf{A}$ com uma linha nula (ou seja, $\mathbf{R} \neq \mathbf{I}$). Assim, $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{E}_k \cdots \det \mathbf{E}_1 \cdot \underbrace{\det \mathbf{R}}_{0} = 0$. □