Notas de aula – Matrizes

Uma *matriz* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *de ordem* $m \times n$ é uma tabela de números reais dispostos em m linhas e n colunas

$$\mathbf{A}_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}$$

Definição 1. *Duas matrizes* $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ *e* $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{r\times s}$ *são* ***iguais*** *se* $m = r$, $n = s$ *e* $a_{ij} = b_{ij}$ *para todos* $i = 1, \cdots m$ *e* $j = 1, \cdots, n$.

Dada uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$, dizemos que $\mathbf{A}$ é

- *quadrada* se $m = n$. Neste caso, podemos dizer simplesmente que $\mathbf{A}$ tem ordem n.
- *matriz nula* se $a_{ij} = 0$ para todos i, j.
- *matriz linha* se $\mathbf{A}$ tem ordem $1 \times n$ (possui apenas uma linha).
- *matriz coluna* se $\mathbf{A}$ tem ordem $m \times 1$ (possui apenas uma coluna).
- *matriz diagonal* se $\mathbf{A}$ é quadrada e $a_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$. Os elementos $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ constituem a *diagonal principal* de $\mathbf{A}$. Por exemplo, a matriz $\mathbf{A}$ abaixo é matriz diagonal:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

  Em particular, a matriz diagonal

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

  cuja diagonal principal é formada de 1's é chamada *matriz identidade (de ordem n).*

- *matriz triangular superior* se $\mathbf{A}$ é quadrada e $a_{ij} = 0$ sempre que $i > j$. Por exemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

  é matriz triangular superior.

- *matriz triangular inferior* se $\mathbf{A}$ é quadrada e $a_{ij} = 0$ sempre que $i < j$. Por exemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

  é matriz triangular inferior.

- *matriz simétrica* se $\mathbf{A}$ é quadrada e $a_{ij} = a_{ji}$ para todos i, j. Por exemplo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

  é matriz simétrica.

Operações usuais com matrizes

Dadas $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m\times n}$ matrizes de mesma ordem $m \times n$ e $k \in \mathbb{R}$, definimos as operações com matrizes:

- a *soma* $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ é a matriz $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m\times n}$ de ordem $m \times n$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todos i, j.

- a *multiplicação por escalar* $k\mathbf{A}$ é a matriz $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m\times n}$ de ordem $m \times n$ tal que $c_{ij} = ka_{ij}$ para todos i, j.

Exemplo 1. Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. Então

$$\mathbf{A} + 2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

□

As operações de soma e multiplicação por escalar seguem as mesmas regras que a de números reais.

Teorema 1 (Propriedades da soma e da multiplicação por escalar)**.** *Dadas matrizes* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *e* $\mathbf{C}$ *de ordem* $m \times n$ *e* $a, b \in \mathbb{R}$, *vale:*

(*i*) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ *(comutatividade)*

(*ii*) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$

(*iii*) $a(b\mathbf{A}) = (ab)\mathbf{A}$

(*iv*) $\mathbf{A} + \mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{A}$, *onde* $\mathbf{0}_{m\times n}$ *é matriz nula*[1].

(*v*) $a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a\mathbf{A} + a\mathbf{B}$

(*vi*) $(a + b)\mathbf{A} = a\mathbf{A} + b\mathbf{A}$

[1]Denotaremos a matriz nula por $\mathbf{0}$ (em **negrito**) e o número real zero por 0.

(vii) $0\mathbf{A} = \mathbf{0}_{m\times n}$ *(a multiplicação da matriz* $\mathbf{A}$ *pelo escalar* 0 *é matriz nula)*

A *transposta* de uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ é a matriz $\mathbf{A}^t = [a_{ji}]_{n\times m}$.

Exemplo 2.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3} \Rightarrow \mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}.$$

□

Teorema 2 (Propriedades da transposição de matrizes)**.** *Seja* $\mathbf{A}$ *uma matriz e* $a \in \mathbb{R}$*. Vale:*

(i) $\mathbf{A}$ *é simétrica se, e somente se* $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}$*.*

(ii) $(\mathbf{A}^t)^t = \mathbf{A}$*.*

(iii) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t$*.*

(iv) $(a\mathbf{A})^t = a\mathbf{A}^t$*.*

Agora, dadas $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times p}$ e $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{p\times n}$ definimos a *multiplicação* $\mathbf{AB}$ (de matrizes) como a matriz $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m\times n}$ tal que

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

Muita atenção nas ordens das matrizes: o produto $\mathbf{AB}$ **só** é possível se o número de colunas de $\mathbf{A}$ é igual ao número de linhas de $\mathbf{B}$ (veja que a soma acima só faz sentido neste caso). Então ao multiplicar matrizes, observe as ordens:

$$\Big[m \times \mathbf{p}\Big]\ \Big[\mathbf{p} \times n\Big] = \Big[m \times n\Big]$$

Não confunda a multiplicação de uma matriz por um escalar com a multiplicação de duas matrizes. São operações diferentes!

A expressão de c_{ij} acima significa que a entrada (i, j) do produto $\mathbf{AB}$ é obtida somando os "produtos correspondentes entre a linha i de $\mathbf{A}$ e a coluna j de $\mathbf{B}$". De fato, observe na soma que aparecem os índices a_{i*} e b_{*j} (o índice k percorre a linha de $\mathbf{A}$ e a coluna de $\mathbf{B}$).

No exemplo a seguir, imagine a multplicação da linha 1 de $\mathbf{A}$ contra a coluna 1 de $\mathbf{B}$; isso fornecerá o elemento da primeira linha, primeira coluna de $\mathbf{AB}$. Faça o mesmo raciocínio para os outros elementos de $\mathbf{AB}$.

Exemplo 3.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{2\times \mathbf{3}}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathbf{3}\times 4} \Rightarrow \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -6 \end{bmatrix}_{2\times 4}.$$

□

Ao contrário das outras operações com matrizes, a multiplicação entre matrizes não se comporta exatamente como a multiplicação entre números reais. O exemplos a seguir mostra que

- **nem sempre** é verdade que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$;
- **nem sempre** é verdade que se $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ então $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

Exemplo 4.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

□

Teorema 3 (Propriedades da multiplicação entre matrizes)**.** *Sejam* $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{B}$ *e* $\mathbf{C}$ *matrizes. Desde que as operações sejam possíveis, vale:*

(i) $\mathbf{AI} = \mathbf{A}$ *e* $\mathbf{IA} = \mathbf{A}$

(ii) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ *(distributividade)*

(iii) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ *(distributividade)*

(iv) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ *(associatividade)*

(v) $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$

(vi) $\mathbf{A0} = \mathbf{0}$ *(a multiplicação da matriz* $\mathbf{A}$ *pela matriz nula é matriz nula)*

Atividade 1. Verifique as propriedades (ii) e (v) para matrizes $\mathbf{A}$ de ordem 2×3 e $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ de ordem 3×3. Tente se convencer que vale para quaisquer ordens.

Matrizes inversíveis

Dada uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ de ordem n, dizemos que $\mathbf{B}$ é uma *inversa* de $\mathbf{A}$ se $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$ ($\mathbf{B}$ também deve ser quadrada de ordem n). Neste caso diremos que $\mathbf{A}$ é *inversível*.

Teorema 4 (Unicidade da inversa)**.** *Se* $\mathbf{A}$ *admite uma inversa, ela é única.*

Devido à unicidade da inversa, denotaremos a inversa de $\mathbf{A}$ por

$$\mathbf{A}^{-1}$$

O próximo resultado é útil para verificar se uma matriz é a inversa de outra. Ele diz que para verificar que $\mathbf{B}$ é a inversa de $\mathbf{A}$, basta verificar **se alguma** das expressões vale: $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ ou $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$; ou seja, não é necessário verificar as **duas**. Não daremos uma demonstração neste momento.

Teorema 5. *Se* $\mathbf{A}$ *é matriz quadrada e* $\mathbf{B}$ *é tal que* $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ *(ou* $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$*), então* $\mathbf{A}$ *é inversível e* $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$*.*

Exemplo 5. A matriz $\mathbf{B} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ é a inversa de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. De fato,

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2.$$

□

Teorema 6 (Inversa do produto)**.** *Sejam* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *matrizes inversíveis de mesma ordem. Então* $\mathbf{AB}$ *é inversível, com*

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

Demonstrações

Demonstração do Teorema 4. Se $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são inversas de $\mathbf{A}$ então $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{AC} = \mathbf{CA} = \mathbf{I}$. Assim,

$$\mathbf{B} = \mathbf{BI} = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = (\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{IC} = \mathbf{C}.$$

□

Demonstração do Teorema 6. Como $\mathbf{A}^{-1}$ e $\mathbf{B}^{-1}$ são matrizes quadradas de mesma ordem, o produto $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ pode ser realizado. Neste caso,

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{IB}) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I},$$

e pelo Teorema 5 concluímos que $\mathbf{AB}$ é inversível, e sua inversa é $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$. □