Métodos e formulações para o problema de *layout* em fila dupla

1 Resumo

Problemas de *layout* em fila dupla (PLFD) tratam da maneira que dispomos facilidades (máquinas) ao longo dos lados de um corredor, como em uma linha de produção, de modo a minimizar certo objetivo. São problemas desafiadores, e surgem em várias aplicações na indústria manufatureira. Modelos de programação linear inteira mista foram propostos na literatura para o PLFD, cuja resolução computacional deu-se por métodos enumerativos tipo *branch and bound*. Tais modelos utilizam a estratégia de “M grande”, tornando as relaxações usuais em métodos *branch and bound* muito pobres. Isso se reflete imediatamente na enumeração explícita de várias soluções parciais e, consequentemente, no aumento drástico do tempo de resolução. O objetivo desta pesquisa é propor modelos para o PLFD e variantes sem o uso de constantes “M grande”. Ao menos duas alternativas se colocam: o uso de formulações disjuntivas de Balas; e o emprego de modelos não lineares. A primeira técnica já se mostrou eficaz em contextos semelhantes, ou seja, é relativamente consolidada na literatura. A segunda estratégia, por sua vez, é inovadora. Por sua maior flexibilidade, modelos não lineares permitem uma formulação do PLFD sem o emprego de variáveis inteiras ou binárias. Utilizando os algoritmos adequados, espera-se que ambas as alternativas mostrem-se eficazes no tratamento do PLFD e suas variantes. Testes computacionais serão feitos para validar técnicas de resolução e modelos propostos.

Palavras-chave: Programação Linear Inteira Mista. Programação Não-Linear. Formulação de Balas. Problemas de *layout* em fila dupla.

2 Introdução

O problema considerado neste subprojeto é o da localização de *facilidades* (máquinas, departamentos etc) em uma determinada área, de modo a minimizar certo objetivo. Usualmente este objetivo representa o custo total de transporte/comunicação entre as facilidades. Tais problemas surgem em aplicações provenientes da indústria manufatureira (consulte por exemplo (EL-RAYAH; HOLLIER, 1970), (KUSIAK; HERAGU, 1987), (HERAGU; KUSIAK, 1988), (CHUNG; TANCHOCO, 2010) e (SECCHIN; AMARAL, 2019)). Dentre os vários tipos de *layouts* possíveis, destacam-se o de **fila simples**, no qual as facilidades são dispostas ao longo de uma linha, e o de **fila dupla**, onde as facilidades são dispostas em duas fileiras. Desta forma, o custo de comunicação entre duas facilidades é determinado pelo produto da distância entre as facilidades pelo custo fixo por unidade de comprimento; quanto mais distantes forem duas facilidades, maior será o custo entre elas. A Figura 1 ilustra uma típica configuração de ***layout* em fila dupla**. Como mencionado anteriormente, o objetivo é o de minimizar o custo total de comunicação.

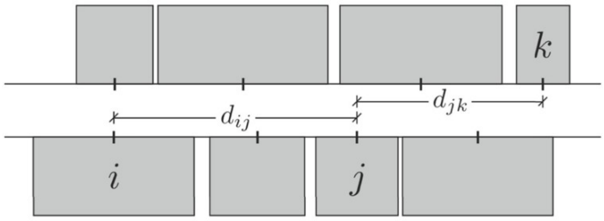

Figura 1: *Layout* em fila dupla. A distância d_{ij} entre as facilidades i e j é a distância entre seus centros.
Fonte: (SECCHIN; AMARAL, 2019).

Neste subprojeto trataremos do **problema de *layout* em fila dupla** (PLFD) e suas variantes. Uma formulação matemática genérica para o problema com n facilidades é dada por

$$min_{\varphi \in D} \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{ij} d_{ij}^{\varphi} \tag{1}$$

onde é D o conjunto de todos os possíveis *layouts*, d_{ij}^{φ} é a distância entre as facilidades i e j referentes ao layout φ, e c_{ij} é o custo fixo unitário de comunicação entre as facilidades i e j. O PLFD é considerado há décadas na literatura, sendo tratado inicialmente por modelos matemáticos que apenas aproximam soluções de (1) ou ainda utilizando (meta)heurísticas. Somente em 2010, Chung e Tanchoco (CHUNG; TANCHOCO, 2010) propuseram um modelo matemático linear inteiro misto, posteriormente corrigido por Zhang e Murray (2012), pelo qual recuperam-se soluções ótimas exatas do problema. Ou seja, no modelo de Chung e Tanchoco é dada uma descrição precisa do conjunto de *layouts* D em (1). Amaral (2013) propôs outra descrição, que também resulta em um modelo de programação linear inteira mista (PLIM), e cuja resolução por métodos tipo *branch and bound* mostrou-se mais eficiente. Recentemente, propusemos uma modificação no modelo de Amaral que propiciou uma melhora considerável no tempo de resolução computacional, bem como reduziu o número de enumerações explícitas feitas pelo método tipo *branch and bound* implementado no pacote CPLEX (SECCHIN; AMARAL, 2019). Todas as formulações exatas citadas anteriormente fazem uso de uma constante "M grande". O uso de constantes do tipo é comum em modelos lineares quando queremos lidar com situações que envolvam escolhas binárias (no caso, o lado de cada facilidade, veja a Figura 1). O inconveniente desta estratégia é que as relaxações lineares, aquelas que substituem restrições de integralidade tipo "$z \in \{0,1\}$" por "$z \in [0,1]$", são muito pobres, ou seja, fornecem limitantes inferiores muito distantes do valor ótimo. Como consequência, a resolução "tradicional" por métodos tipo *branch and bound* é prejudicada, recaindo em grandes árvores de enumeração (cujo crescimento, como se sabe, tende a ser exponencial em função do número de variáveis). De fato, testes computacionais feitos com o modelo de Secchin e Amaral (2019) comprovam que a grande maioria do tempo gasto em sua resolução fica a cargo da comprovação de otimalidade (brecha de dualidade zero), e não do cálculo da solução ótima em si, uma consequência direta da pobreza das relaxações. Não é por menos que um dos pontos cruciais para o relativo sucesso dos modelos de Amaral (2013) e Secchin e Amaral (2019) é o uso de cortes válidos nos nós da árvore de enumeração, que minimizam este efeito. **Portanto, julgamos que formulações matemáticas que não utilizem a estratégia de "grande M" podem ter grande sucesso para o problema de *layout* em fila dupla**, associadas, evidentemente, aos algoritmos adequados.

Pretendemos neste subprojeto propor novas formulações para o PLFD sem o uso de constantes "M grande". Duas alternativas se apresentam: as formulações disjuntivas de Balas (veja (MARTIN, 1999)); e o uso de modelos não lineares. A primeira alternativa já é consolidada na literatura. De fato, a técnica foi proposta e aprimorada por Egon Balas em uma série de artigos científicos entre os anos 70 e 90, e foi utilizada com sucesso em vários contextos (veja referências em (MARTIN, 1999)). A segunda alternativa, por sua vez, não é comum para problemas do tipo. Porém, modelos não lineares tendem a ser menores e puramente contínuos (o uso de variáveis binárias ou inteiras é dispensado) pois permitem uma maior flexibilidade na descrição do conjunto viável, no caso, o conjunto de *layouts* D em (1). O preço a se pagar é uma possível dificuldade em sua resolução (por exemplo, ausência de convexidade). Neste caso, uma formulação cuidadosa associada a um método de otimização não linear adequado se faz necessária. Acreditamos que esta estratégia pode ter grande sucesso em casos particulares importantes do PLFD já estudados na literatura. Evidentemente outras formulações e/ou métodos não estão descartados.

Como citado anteriormente, casos particulares do PLFD foram considerados na literatura, dentre os quais destacamos o **problema do corredor** (AMARAL, 2012), onde não é permitida folga entre duas facilidades adjacentes (veja a Figura 1); e ***parallel row ordering problem*** (YANG *et al*, 2019), onde o lado de cada facilidade é definido *a priori*. Ambos os casos estão associados à aplicações da indústria. Evidentemente, para estes problemas particulares existem modelos simplificados mais tratáveis computacionalmente. Tais problemas também são de interesse nesse subprojeto.

3 Referências

AMARAL, A. R. S. Optimal solutions for the double row layout problem. **Optimization Letters**, v. 7, n. 1, p. 407-413, 2013.

AMARAL, A. R. S. The corridor allocation problem. **Computers & Operations Research**, v. 39, p. 3325-3330, 2012.

ANDREANI, R.; BIRGIN, E. G.; MARTÍNEZ, J. M.; SCHUVERDT, M. L. On augmented lagrangian methods with general lower-level constraints. **SIAM Journal on Optimization**, v. 18, n. 4, p. 1286-1309, 2007.

CHUNG J.; TANCHOCO, J. M. A. The double row layout problem. **International Journal of Production Research**, v. 48, n. 3, p. 709-727, 2010.

EL-RAYAH, T. E.; HOLLIER, R. H. A review of plant design techniques. **International Journal of Production Research**, v. 8, n. 3, p. 263-279, 1970.

HERAGU S. S.; KUSIAK, A. Machine layout problem in flexible manufacturing systems, **Operations Research**, v. 36, n. 2, p. 258-268, 1988.

KUSIAK A.; HERAGU, S. The facility layout problem. **European Journal of Operational Research**, v. 29, n. 3, p. 229-251, 1987.

MARTIN, R. K. Large Integer Programs: Projection and Inverse Projection. In: ______. **Large Scale Linear and Integer Optimization: A Unified Approach**. Springer US, 1999. cap. 16, p. 565-632.

SECCHIN, L. D.; AMARAL, A. R. S.; An improved mixed-integer programming model for the double row layout of facilities. **Optimization Letters**, v. 13, n. 1, p. 193-199, 2019.

WÄTCHER, A.; BIEGLER, L. T. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. **Mathematical Programming, Ser. A**, v. 106, n. 1, p. 25-57, 2006.

YANG X.; CHENG W.; SMITH A. E.; AMARAL, A. R. S. An improved model for the parallel row ordering problem. **Journal of the Operational Research Society**, 2019.

ZHANG Z.; MURRAY C. C. A corrected formulation for the double row layout problem. **International Journal of Production Research**, v. 50, n. 15, 2012.