Métodos de pontos interiores para programação linear e quadrática

Resumo

Com o advento do método Simplex idealizado por Dantzig nos anos 1940, a programação linear ganhou enorme impulso, tornando-se um tópico central na área de otimização. De fato, são inúmeras as aplicações descritas por modelos de programação linear. O método Simplex permitiu (e até hoje permite) a resolução numérica eficiente desses modelos, apesar de não ser polinomial. A partir dos anos 1980, outra classe de métodos emergiu: a dos pontos interiores. Curiosamente, métodos de pontos interiores são técnicas originárias da otimização não linear, mas que foram adaptadas com extremo sucesso à programação linear e quadrática. Esses métodos possuem boas propriedades de convergência (em particular, alguns são polinomiais) e seu desempenho numérico sobre problemas lineares por vezes supera o Simplex, sobretudo em problemas de grande porte. Não à toa, os melhores pacotes computacionais implementam alguma técnica de pontos interiores que, em geral, baseiam-se no método primal-dual preditor-corretor de Mehrotra com múltiplas correções. Nesta pesquisa, os principais métodos de pontos interiores para programação linear e quadrática são abordados. O objetivo é compará-los, do ponto de vista teórico e numérico, entre si. Modelos advindos de bibliotecas da literatura e de aplicações serão considerados nos testes numéricos.

Palavras-chave: Programação Linear. Programação quadrática. Pontos interiores. Algoritmo preditor-corretor de Mehrotra.

1 Introdução

Nesta pesquisa, consideramos problemas de otimização da forma

$$\begin{gathered} min_x \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \\ s.a.\ Ax = b,\ x \geq 0 \end{gathered} \tag{1}$$

onde $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Suponha-se que $posto\ A = m \leq n$. Esta pesquisa se divide em duas importantes classes de modelos, ambos representados sob a forma (1):

1. Modelos de **Programação Linear (PL)**, onde Q é a matriz nula;
2. Modelos de **Programação Quadrática (estritamente convexa)**, onde Q é uma matriz simétrica e definida positiva.

Modelos de programação linear são de grande importância prática, pois podem ser usados para descrever várias aplicações na indústria (veja por exemplo (VANDERBEI, 2008)). Eles ganharam grande destaque e, em certa medida, alavancaram a própria área de otimização, quando Dantzig apresentou seu método Simplex nos anos 1940. Ainda que o Simplex não seja um método com complexidade polinomial, propiciou pela primeira vez a resolução de problemas interessantes, relativamente grandes, por computador. De fato, o Simplex e suas variantes até hoje são uma das principais opções (senão a principal) para resolução de problemas lineares. Em especial, o método Simplex dual é adequado na resolução de problemas lineares com variáveis inteiras/binárias por processos enumerativos.

A despeito do sucesso do Simplex e suas variantes, outra classe de métodos ganhou destaque a partir dos anos 1980: a dos pontos interiores. Apesar de sua origem ser na otimização não linear, foram adaptados com extremo sucesso à programação linear e quadrática. Esses métodos possuem boas propriedades de convergência (em particular, alguns são polinomiais) e seu desempenho numérico sobre problemas lineares por vezes supera o Simplex, sobretudo em problemas de grande porte (LUSTIG; MARSTEN; SHANNO, 1994). A aplicação dessa técnica à PL remonta aos trabalhos de Dikin em 1967, e de Karmakar, que propôs o primeiro método polinomial "funcional" em 1984. Posteriormente, surgiram os métodos primais-duais com os trabalhos de Megiddo no final dos anos 1980. Diferente dos anteriores (métodos do tipo *primal* ou *dual*), essa classe de métodos trabalha simultaneamente com o problema primal (1) e seu dual. Essa técnica permitiu grande avanço no uso de pontos interiores em programação linear, concretizando as implementações eficientes em pacotes computacionais modernos. Por esse motivo, métodos primais-duais são o principal foco desta pesquisa.

No que segue, vamos descrever sucintamente os métodos primais-duais para PL. Quando Q é matriz nula, as condições de otimalidade para (1) são

$$\begin{array}{c} Ax=b,\, x\geq 0, \\ A^T y+z=c,\, z\geq 0, \\ XZe=0 \end{array} \qquad (2)$$

onde $X=diag(x_1,\ldots,x_n)$, $Z=diag(z_1,\ldots,z_n)$ e $e\in\mathbb{R}^n$ é vetor de 1's. A última equação em (2) é chamada *condição de complementaridade*, e equivale a $x_i z_i=0, i=1,\cdots,n$. O sistema (2) é precisamente as condições de Karush-Kuhn-Tucker de (1), que podem ser obtidas também via teoria de dualidade. Os métodos de pontos interiores primais-duais consistem, a grosso modo, na aplicação do método de Newton a um sistema não linear $F(x,y,z)=0$ relacionado à (2), mas retirando as restrições de não negatividade (logo, resultando em um sistema apenas com igualdades). As restrições $x\geq 0$ e $z\geq 0$ são tratadas controlando o tamanho do passo ao longo da direção newtoniana de modo que sempre ficamos no interior relativo $x^k>0, z^k>0$ (daí o nome "pontos interiores"). Assim, nesses métodos tanto as variáveis primais x quanto as duais y,z são atualizadas a cada iteração (daí o nome "primal-dual"). Dentre os métodos primais-duais, encontram-se o *afim-escala*, o *seguidor de caminhos* e o *preditor-corretor* de Mehrotra (MEHROTRA, 1992). No primeiro, e mais simples, Newton é aplicado exatamente à (2) sem as restrições de não negatividade. Esse método apresenta problemas de estabilidade numérica majoritariamente relacionados ao mal balanceamento dos produtos $x_i z_i, i=1,\cdots,n$, dado que a matriz do sistema newtoniano fica mal condicionada à medida que estes produtos diferem entre si. A fim de minimizar este inconveniente, no método seguidor de caminhos a equação $XZe=0$ é substituída por $XZe=\mu$, onde $\mu>0$ é levado à zero durante o processo de minimização. Em outras palavras, as condições de otimalidade (2) são perturbadas, e "recuperadas" à medida em que μ se aproxima de zero. Isso força os produtos $x_i z_i, i=1,\cdots,n$ a permanecerem balanceados, com valores próximos à μ. Finalmente, o algoritmo preditor-corretor de Mehrotra combina as direções dos dois métodos anteriores em um só: a direção *preditora* afim-escala e a direção *corretora* do seguidor de caminhos. Dentre os três, é o que apresenta melhores resultados numéricos (LUSTIG; MARSTEN; SHANNO, 1992). Mais tarde, Carpenter *et al* (1993) propuseram uma melhora no método de Mehrotra que utiliza múltiplas correções. A ideia é combinar várias direções corretoras, em uma quantidade determinada heuristicamente de modo a balancear eficácia e eficiência. Os autores mostraram que esta variante supera todas as outras. Não à toa, as implementações de pontos interiores para PL dos principais pacotes utilizados na indústria, como o CPLEX e Gurobi, baseiam-se nessa variante.

Os métodos de pontos interiores primais-duais para PL são facilmente adaptáveis à problemas quadráticos estritamente convexos, onde Q é simétrica e definida positiva. Basicamente, a diferença é que a viabilidade dual $A^T y+z=c$ dá lugar à $A^T y+z-Qx=c$ em (2). O custo computacional adicional por iteração é relativamente baixo, o que torna esses métodos uma opção extremamente atrativa para programação quadrática. Métodos primais-duais são, de fato, a única opção disponível no CPLEX para esta classe de problemas.

Nesta pesquisa, consideramos os métodos de pontos interiores aplicados à (1), com ênfase nos métodos primais-duais para PL. **O objetivo é compará-los entre si do ponto de vista teórico e numérico.** Ressaltamos que, apesar de serem utilizados na prática e estarem implementados nos principais pacotes de otimização utilizados pela indústria, esses métodos **não** são abordados em disciplinas obrigatórias da graduação em matemática, nem mesmo nas engenharias.

Referências

CARPENTER, T. J.; LUSTIG, I. J.; MULVEY, J. M.; SHANNO, D. F. Higher Order Predictor-Corrector Interior Point Methods with Applications to Quadratic Objectives. **SIAM Journal on Optimization**, v. 3, p. 696-725, 1993.

GONDZIO, J. Interior point methods 25 years later. **European Journal of Operational Research**, v. 218, p. 587-601. 2012.

GONZAGA, C. C. Path-Following Methods for Linear Programming. **SIAM Review**, v. 34, n. 2, p. 167-224, 1992.

LUSTIG, I. J.; MARSTEN, R. E.; SHANNO, D. F. Interior Point Methods for Linear Programming: Computational State of the Art, **ORSA Journal on Computing**, v. 6, p. 1-14, 1994.

___________ On Implementing Mehrotra's Predictor–Corrector Interior-Point Method for Linear Programming. SIAM Journal on Optimization, v. 2, n. 3, p. 435-449, 1992.

MACULAN, N.; FAMPA, M. H. C. **Otimização linear**. Editora UnB, 2006.

MEHROTRA, S. On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Method. **SIAM Journal on Optimization**, v. 2, n. 2, p. 575-601, 1992.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical optimization**. Springer, 2006.

VANDERBEI, R. J. **Linear Programming: Foundations And Extensions**. 3ª ed, New York: Springer, 2008.

WRIGHT, S. J. **Primal-Dual Interior-Point Methods**. SIAM, 1997.