



Modelagem Matemática da Dinâmica Populacional do Mexilhão Dourado

Carolina Martinelli <carolmartinelli97@gmail.com>

Universidade Federal do Espírito Santo

August 9, 2024

O Mexilhão Dourado

Origem

O mexilhão-dourado é um molusco de origem Asiática que chegou à América do Sul através de navios cargueiros.



O Mexilhão Dourado

Comportamento

Enquanto larva, o mexilhão-dourado é levado livremente pela água ou por objetos que os transportam. Se alimenta de algas e termina se alojando em superfícies sólidas, onde se fixa e cresce formando grandes colônias.



O Mexilhão Dourado

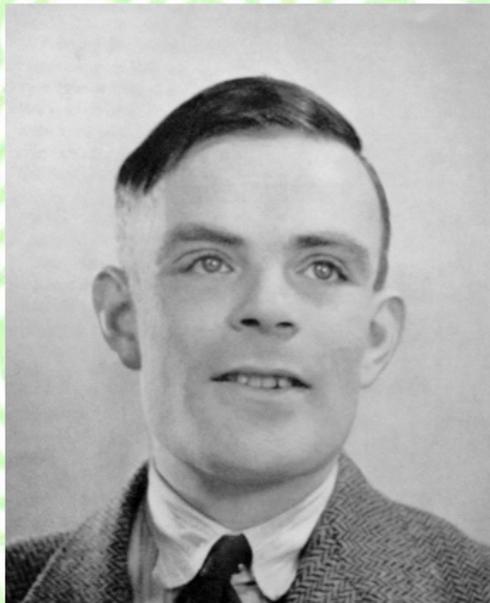
Prejuízos Causados

- ▶ Destruição da vegetação aquática;
- ▶ Ocupação do espaço e disputa por alimento com os moluscos nativos;
- ▶ Prejuízos à pesca;
- ▶ Entupimento de canos e dutos de água, esgoto e irrigação;
- ▶ Entupimento de sistemas de tomada de água para geração de energia elétrica;
- ▶ Prejuízos à navegação.

Formação de Padrões

Alan Turing

Matemático e criptógrafo inglês considerado atualmente como o pai da computação, também ficou muito conhecido como um dos responsáveis por decifrar o código utilizado pelas comunicações nazistas durante a Segunda Guerra Mundial.



Formação de Padrões

Morfogênese

Através de seus estudos, Turing encontrou um resultado físico que previa o potencial da difusão levar a "morfogênese química". O conceito de morfogênese refere-se ao processo biológico de desenvolvimento das formas e estruturas características de uma espécie.



Formação de Padrões

Fatores Necessários

- ▶ Existência de duas ou mais espécies;
- ▶ Diferentes taxas de difusão para os participantes;
- ▶ Interações.

Combinados, estes fatores podem gerar padrões químicos que surgem como uma desestabilização de uma distribuição uniforme.

Formação de Padrões

O Modelo

Considere o Modelo simplificado do sistema presa-predador de duas equações para o mexilhão dourado, onde A representa a população de algas e M a população de mexilhões

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} &= r_1 A \left(1 - \frac{A}{K_A} \right) - b_1 M \left(\frac{A^2}{c^2 + A^2} \right), \\ \frac{\partial M}{\partial t} &= r_2 b_1 M \left(\frac{A^2}{c^2 + A^2} \right) - b_2 M.\end{aligned}$$

Inicialmente o sistema se encontra em um estado estacionário espacialmente uniforme e positivo, onde o ponto de equilíbrio dado por

$$(\bar{A}, \bar{M}) = \left(\sqrt{\frac{b_2 c^2}{r_2 b_1 - b_2}}, \frac{r_1 r_2 c}{\sqrt{b_2 (r_2 b_1 - b_2)}} - \frac{c^2 r_1 r_2}{K_A (r_2 b_1 - b_2)} \right).$$

Formação de Padrões

O Modelo

Ao incrementar a difusão no sistema anterior, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} &= r_1 A \left(1 - \frac{A}{K_A}\right) - b_1 M \left(\frac{A^2}{c^2 + A^2}\right) + D_A \Delta A, \\ \frac{\partial M}{\partial t} &= r_2 b_1 M \left(\frac{A^2}{c^2 + A^2}\right) - b_2 M + D_M \Delta M.\end{aligned}$$

Para estudar os efeitos das perturbações amplificadas pela combinação das forças de reação e difusão, introduzimos uma pequena parturbação do estado estacionário.

Formação de Padrões

O Modelo

Este se trata de um sistema não linear, por isso é necessário reescrevê-lo utilizando expansões em série de Taylor em torno do ponto de equilíbrio.

Em sua forma matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial A'}{\partial t} \\ \frac{\partial M'}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' \\ M' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_A & 0 \\ 0 & D_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta A' \\ \Delta M' \end{bmatrix},$$

onde

$$a_{11} = \frac{\partial}{\partial A} R_1(\bar{A}, \bar{M}), \quad a_{12} = \frac{\partial}{\partial M} R_1(\bar{A}, \bar{M}),$$

$$a_{21} = \frac{\partial}{\partial A} R_2(\bar{A}, \bar{M}), \quad a_{22} = \frac{\partial}{\partial M} R_2(\bar{A}, \bar{M}).$$

Formação de Padrões

O Modelo

Através de um estudo analítico a respeito deste último sistema, chegamos às condições necessárias e suficientes para a instabilidade do modelo mexilhão-algas. São elas:

- ▶ $a_{11} + a_{22} < 0$;
- ▶ $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$;
- ▶ $a_{11}D_M + a_{22}D_A > 2\sqrt{D_A D_M (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}$,

Formação de Padrões

Andamento Atual do Projeto

Neste momento, estudamos métodos computacionais para solução numérica do sistema, com o objetivo de gerar, através do modelo, imagens dos padrões que se assemelham aos padrões dos mexilhões encontrados na natureza.

Esperamos ainda, trabalhar com o modelo de três equações do mexilhão dourado. Tratando, além das populações de algas e mexilhões adultos, a forma larval dessa espécie.

Obrigada



*“Por vezes, são as pessoas
de quem nada se imagina
as que realizam feitos que
ninguém poderia imaginar”*

Alan Turing,
em *O Jogo da Imitação*

Referências

<https://brasilecola.uol.com.br/biografia/alan-mathison.htm>

<https://www.ecycle.com.br/morfogenese/> EDELSTEIN-KESHET, L. Mathematical Models in Biology. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104), 1988. (Classics in Applied Mathematics). ISBN 9780898719147.

Disponível em:

<<https://books.google.com.br/books?id=uABYP1hnsf0C>>.