CNO'S

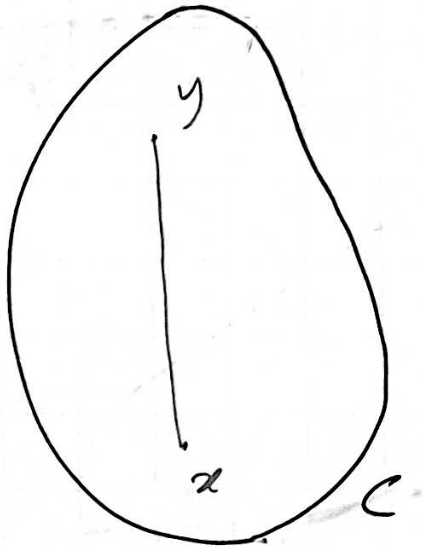
1ª ORDEM: $\boxed{\nabla f(x^*) = 0}$.

2ª ORDEM: $\nabla f(x^*) = 0$, $\nabla^2 f(x^*) \geq 0$.

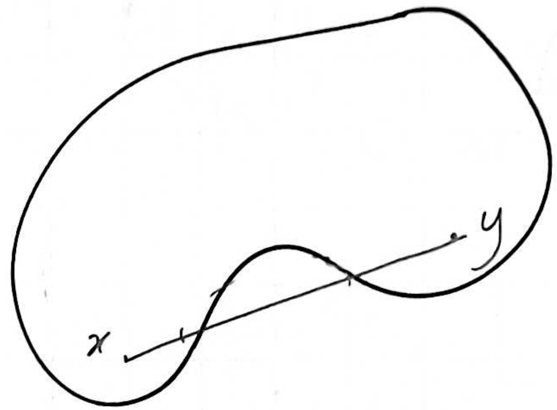
CONVEXIDADE

CONJUNTOS CONVEXOS.

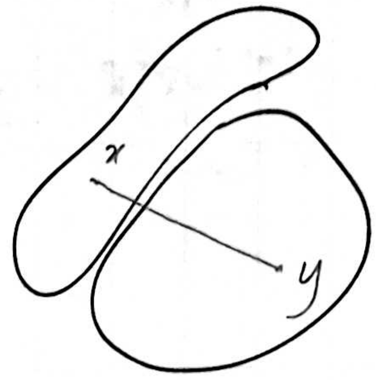
"UM CONJUNTO C É CONVEXO SE, DADOS $x, y \in C$, O SEGMENTO QUE LIGA x A y ESTÁ CONTIDO EM C."



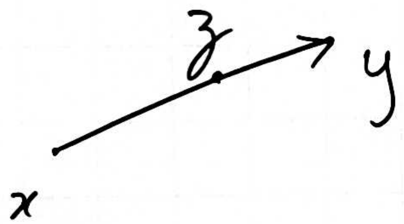
CONVEXO



NÃO CONVEXO



NÃO CONVEXO



$$z = x + t(y-x) = (1-t)x + ty\ , \quad t \in [0,1].$$

DEFINIÇÃO: UM CONJUNTO $C \subset \mathbb{R}^n$ É CONVEXO SE, DADOS

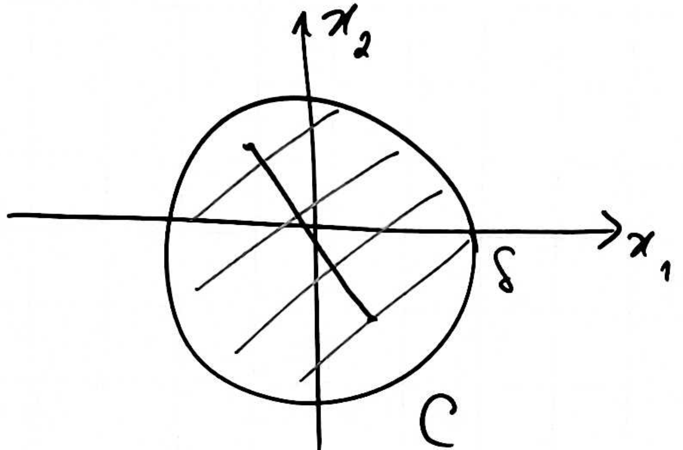
$x, y \in C$ E $t \in [0,1]$, TEMOS

$$(1-t)x + ty \in C.$$

EXEMPLOS:

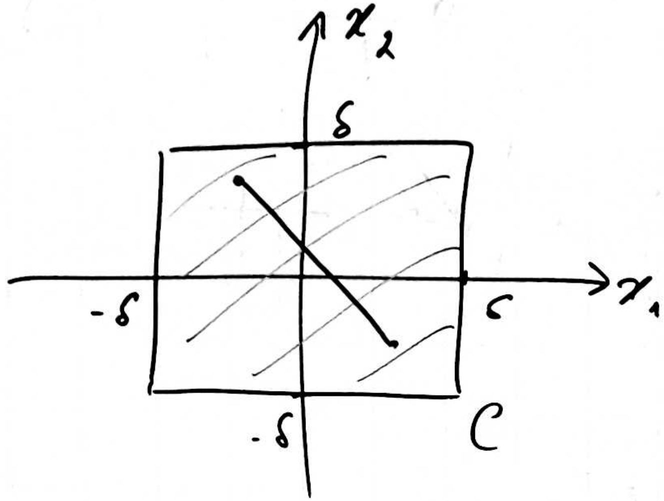
1) $C = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| \leq \delta \}$, $\delta > 0$ FIXO.

1.1) $n = 2$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ (NORMA EUCLIDEANA)

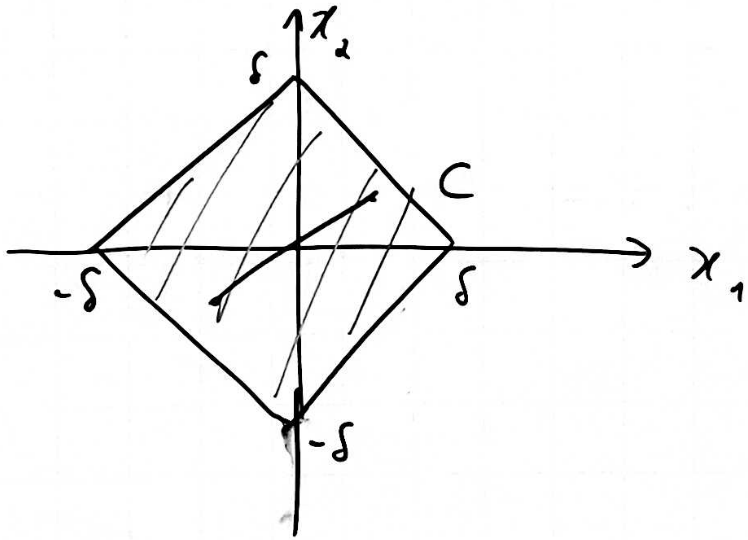


1.2) $n = 2$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ ONDE

$$\|(x_1, x_2)\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|\}.$$

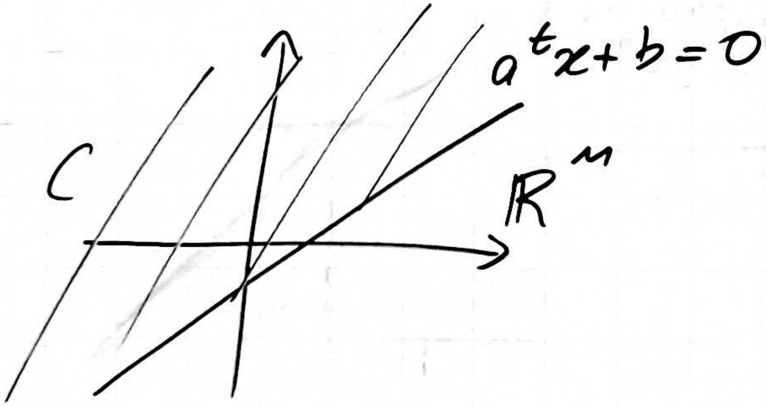


1.3) $n = 2$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$, ONDE $\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$.



3) $C = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \ a^t x + b \leq 0 \}$.

(ou $C = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \ a^t x + b = 0 \}$).



$\underline{C \text{ é convexo}}$: DADOS $x, y \in C$ E $t \in [0,1]$, TEMOS

$$\underline{a^t((1-t)x + ty) + b} = (1-t)a^t x + t a^t y + b$$

$$= (1-t)a^t x + t a^t y + (1-t)b + tb$$

$$= (1-t)\underbrace{[a^t x + b]}_{\leq 0} + t\underbrace{[a^t y + b]}_{\leq 0} \leq 0.$$

OU SEJA, $(1-t)x + ty \in C$.

O VETOR $(1-t)x+ty$ É CHAMADO <u>COMBINAÇÃO CONVEXA</u> DE x E y $(t \in [0,1])$.

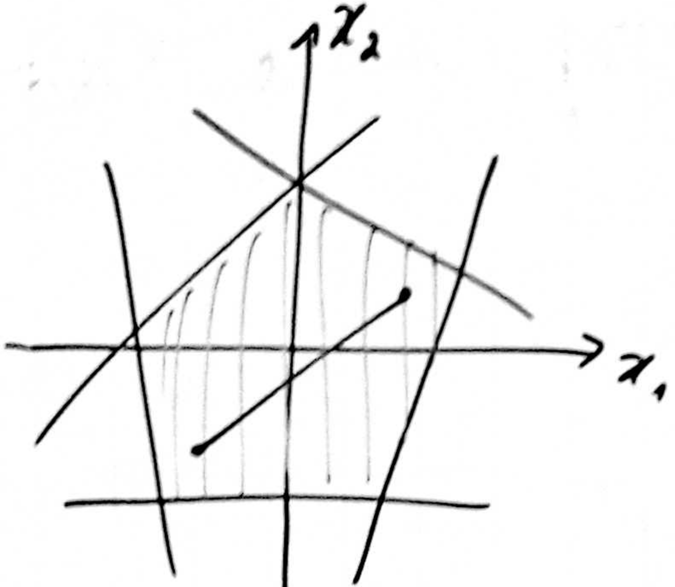
4) SE $C_1, \dots, C_m$ SÃO CONVEXOS, ENTÃO A INTERSEÇÃO $\bigcap_{i=1}^{m} C_i$ É CONVEXA.

<u>PROVA:</u> EXERCÍCIO.

5) $C = \{x \in \mathbb{R}^n ; Ax = b, Cx \leq d\}$ É CONVEXO.

DE FATO, C É UMA INTERSEÇÃO DE CONJ. DO EXEMPLO 3).

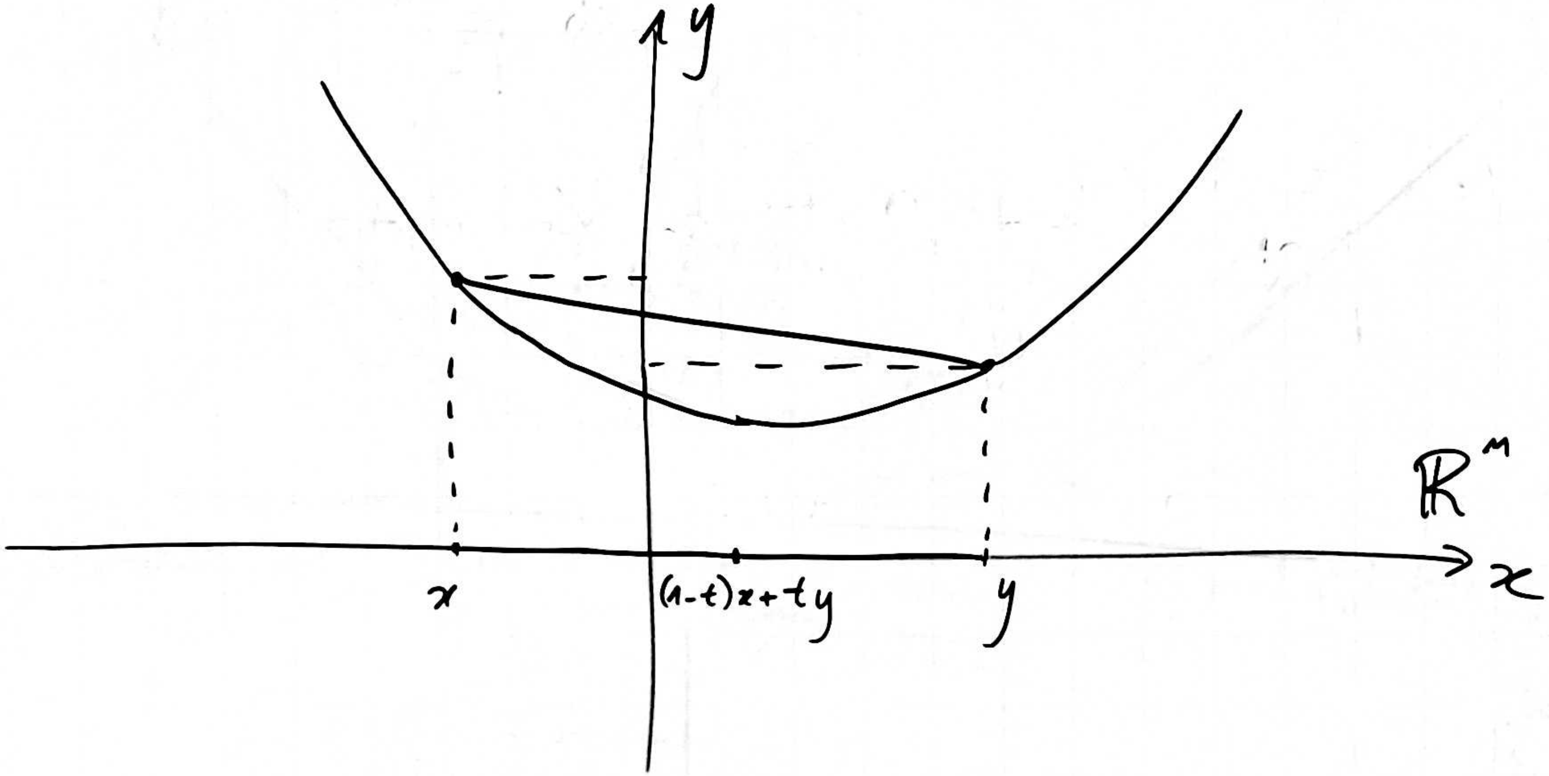
5.1) $C = \{x \in \mathbb{R}^2 ; Ax \leq b\}$.



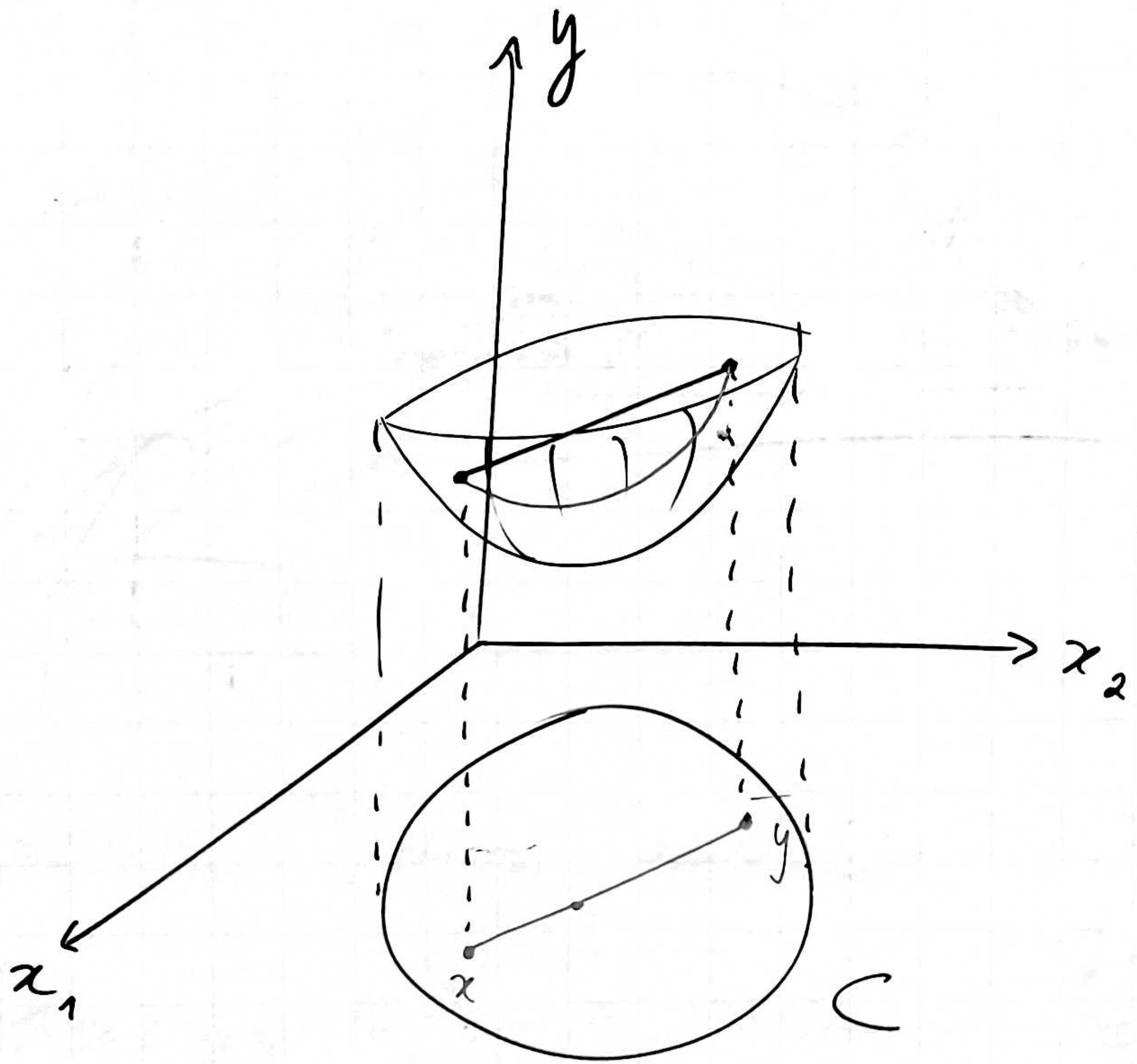
FUNÇÕES CONVEXAS

DEFINIÇÃO: UMA FUNÇÃO $f: C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ DEFINIDA NO CONJUNTO CONVEXO C É DITA CONVEXA SE, DADOS $x, y \in C$ E $t \in [0,1]$, TEMOS

$$f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)f(x) + t f(y).$$



$$(1-t)\big(x, f(x)\big) + t\big(y, f(y)\big)$$


y
x_2
x_1
x
y
C

EXEMPLOS:

1) $f(x) = c^t x$ É CONVEXA.

DE FATO, PARA $x, y \in \mathbb{R}^n$ E $t \in [0,1]$, TEMOS

$$f((1-t)x + ty) = c^t[(1-t)x + ty]$$
$$= (1-t)c^t x + t c^t y$$
$$\leq (1-t) f(x) + t f(y)$$

DAÍ, CONCLUE-SE QUE PROBLEMAS LINEARE SÃO CONVEXOS, ISTO É, A F.O. É CONVEXA E A REGIÃO VIÁVEL É UM CONJUNTO CONVEXO.

$$\min\ c^t x \quad \text{s.a.} \quad Ax + b = 0,\ Cx + d \leq 0.$$

2) $f(x) = x^2$ É CONVEXA.

3) $f(x) = \frac{1}{2} x^t A x + b^t x + c$, ONDE A É SIMÉTRICA E SEMI-DEFINIDA POSITIVA, É CONVEXA.

4) SE $f_1, \ldots, f_m$ SÃO FUNÇÕES CONVEXAS SOBRE C (CONVEXO), ENTÃO

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \quad \text{com } \lambda_i \geq 0, \ \forall i,$$

É CONVEXA SOBRE C.

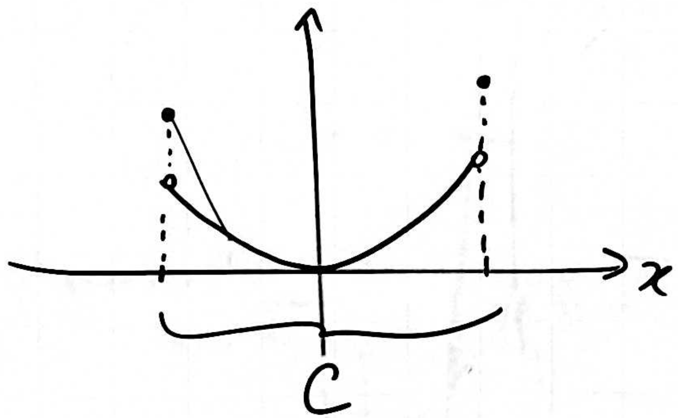
<u>PROVA</u>: EXERCÍCIO.

POR EXEMPLO,

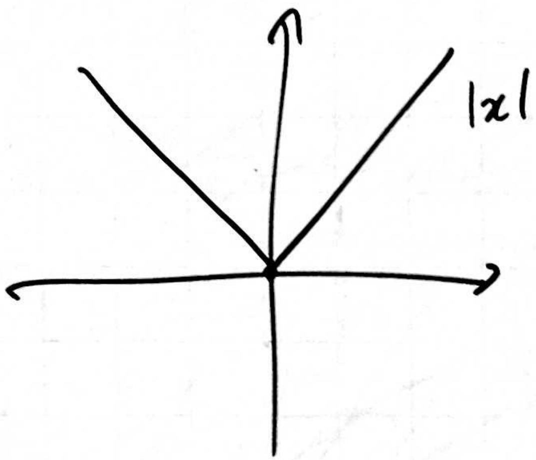
$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2} x_2^4 + 2(x + 2y)$$

É CONVEXA.

5) TODA FUNÇÃO CONVEXA f SOBRE C É CONTÍNUA SOBRE $\text{int}\, C$.



6) <u>NEM TODA</u> FUNÇÃO CONVEXA É DIFERENCIÁVEL. EX. $f(x) = |x|$



EXERCÍCIO: MOSTRE ALGEBRICAMENTE QUE $f(x) = |x|$ É CONVEXA. MAIS GERALMENTE, A FUNÇÃO

$$f(x) = \|x\|.$$

MAS $f(x) = |x|$ NÃO TEM DERIVADA EM 0.

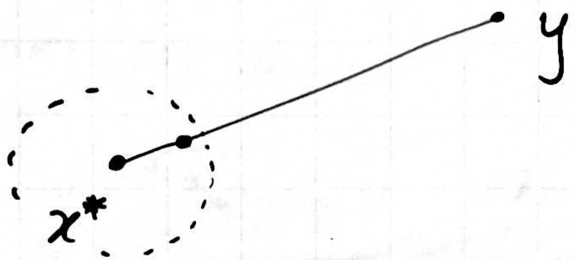
CONVEXIDADE EM OTIMIZAÇÃO

PERGUNTA: POR QUE CONVEXIDADE É BOM EM OTIMIZAÇÃO?

TEOREMA: SEJA $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ UMA FUNÇÃO CONVEXA SOBRE C (CONVEXO). SE $x^* \in C$ É MINIMIZADOR LOCAL DE f EM C,

ENTÃO x^* É MINIMIZADOR GLOBAL.

PROVA: SEJA x^* MINIMIZADOR LOCAL DE f EM C, E SUPONHA QUE x^* NÃO SEJA MIN. GLOBAL. ASSIM, EXISTE $y \in C$ TAL QUE $f(y) < f(x^*)$.



COMO C É CONVEXO, A COMBINAÇÃO

$$x_t = (1-t)x^* + ty \in C \quad , \forall t \in [0,1].$$

AGORA, PARA $t \in (0,1]$,

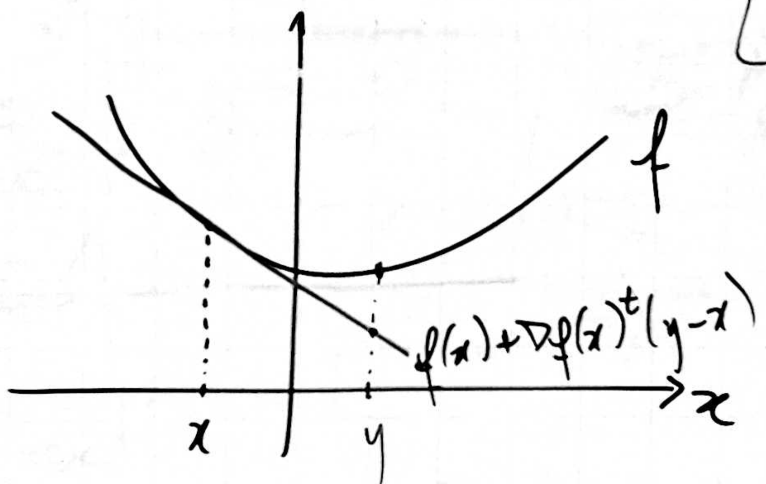
$$f(x_t) = f((1-t)x^* + ty) \overset{f \text{ CONVEXA}}{\leq} (1-t)f(x^*) + tf(y)$$

$$< (1-t)f(x^*) + tf(x^*) = f(x^*).$$

ORA, $f(x^t) < f(x^*)$, $\forall t \in (0,1]$, CONTRARIA A MINIMALIDADE DE x^*. $\blacksquare$

TEOREMA: SEJA $f: C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ DIFERENCIÁVEL. ENTÃO f É CONVEXA SE, E SOMENTE SE,

$$f(y) \geq \underbrace{f(x) + \nabla f(x)^t (y-x)}_{\text{APROXIMAÇÃO LINEAR DE } f \text{ EM TORNO DE } x.}, \quad \forall x, y \in C.$$



COROLÁRIO: SEJA $f: C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CONVEXA E DIFERENCIÁVEL.

SE $\nabla f(x^*)^t (y - x^*) \geq 0$, $\forall y \in C$, ENTÃO

x^* É MINIMIZADOR GLOBAL DE f SOBRE C.

PROVA: SENDO f CONVEXA,

$$f(y) - f(x^*) \geq \nabla f(x^*)^t (y - x^*) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(y) \geq f(x^*), \quad \forall y \in C. \quad \blacksquare$$

TEOREMA: SEJA $f: C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CONVEXA E DIFERENCIÁVEL.

SE $\nabla f(x^*) = 0$ ENTÃO x^* É MINIMIZADOR GLOBAL DE f SOBRE C.

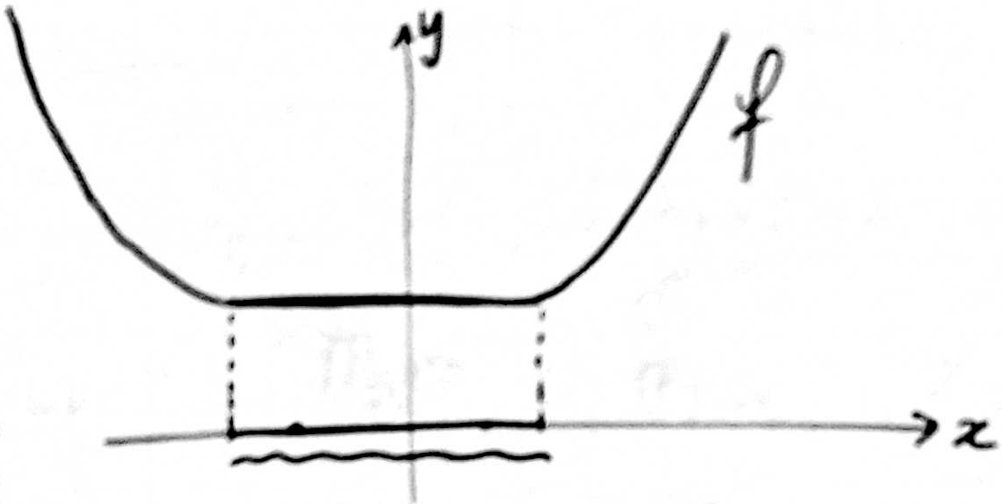
PROVA: TRIVIAL A PARTIR DO COROLÁRIO ■

"A CNO DE 1ª ORDEM $(\nabla f(x^*) = 0)$ É SUFICIENTE PARA OTIMALIDADE EM PROBLEMAS CONVEXOS".

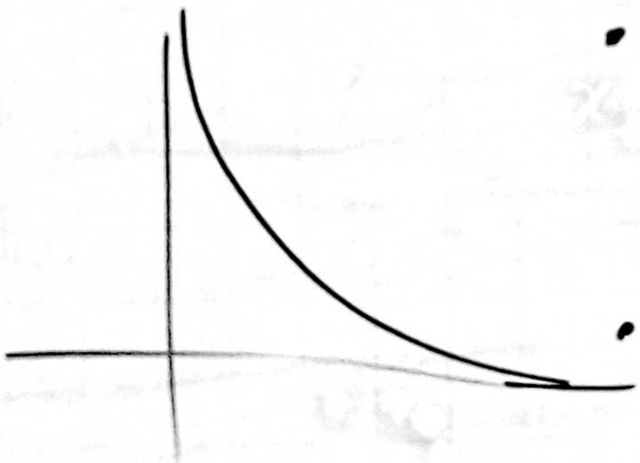
PROVA DO TEOREMA: DEPOIS!

EXERCÍCIOS:

1) PROVE QUE O CONJUNTO DOS MINIMIZADORES DE UM PROBLEMA CONVEXO $\min f(x)$ s.a. $x \in C$ É CONVEXO.



2) A FUNÇÃO $f(x) = \frac{1}{x}$ É CONVEXA EM $(0, \infty)$.



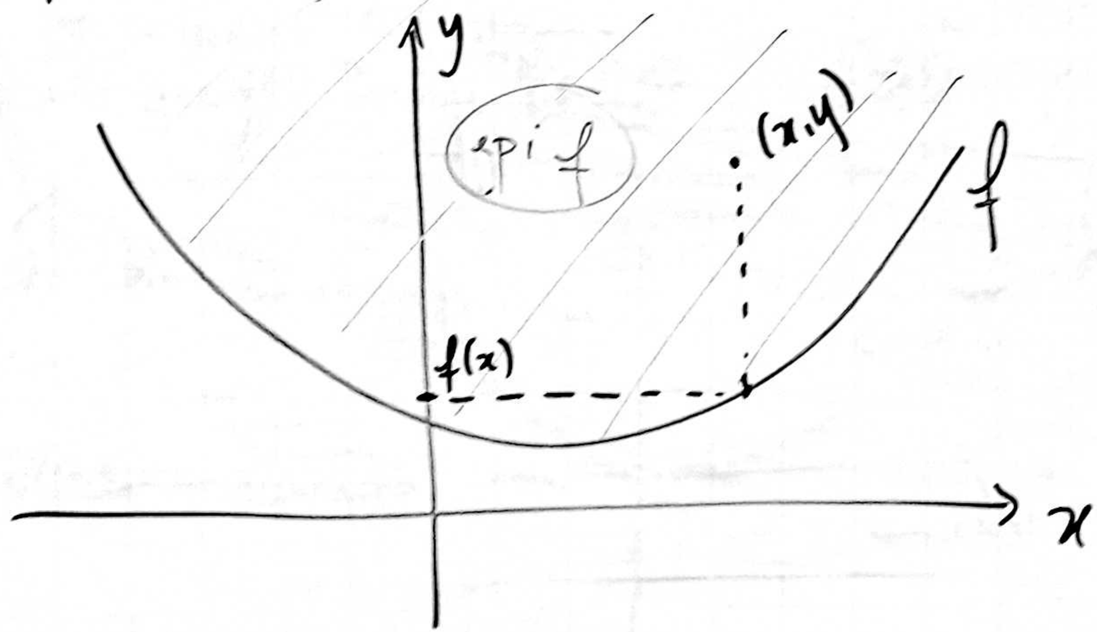
- ELA POSSUI MINIMIZADOR EM $(0, \infty)$?
- E EM $(0, a]$, $a > 0$?

3) DEFINIMOS O <u>EPÍGRAFO</u> DE UMA FUNÇÃO CONVEXA $f: C \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ COMO

$$\text{epi}\, f = \{(x, y) \in C \times \mathbb{R} \; ; \; f(x) \leq y\}.$$

MOSTRE QUE

$$f \text{ É CONVEXA} \iff \text{epi}\, f \text{ É CONVEXO}.$$



4) SEJA $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ UMA FUNÇÃO CONVEXA DE CLASSE C^2.

AFIRMAÇÃO: f É CONVEXA $\iff \nabla^2 f(x) \geq 0 \ , \forall x \in \mathbb{R}^n$.

($\nabla^2 f(x)$ SEMI-DEF. POSIT.)

MOSTRE A IMPLICAÇÃO $\Rightarrow$).

TEOREMA: $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ DIFERENCIÁVEL, C CONVEXO.

ENTÃO

$$f \text{ é CONVEXA} \iff f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^t (y-x), \ \forall x,y \in C.$$

PROVA: SUPONHA f CONVEXA. DAÍ, DADOS $x, y \in C$ E $t \in (0,1]$, TEMOS

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t) f(x) + t f(y).$$

$$\Rightarrow \quad f(x + t(y-x)) - f(x) \leq t(f(y) - f(x))$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t} \leq f(y) - f(x).$$

FAZENDO $t \to 0^+$, OBTEMOS

$$\nabla f(x)^t(y-x) \leq f(y) - f(x)$$

RECIPROCAMENTE, SUPONHA QUE $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^t(y-x)$, $\forall x, y \in C$

PARA $t \in [0,1]$, DEFINA

$$x_t = (1-t)x + ty \in C.$$

TEMOS

$$f(y) \geq f(x_t) + \nabla f(x_t)^t(y-x_t) \qquad (1)$$

E

$$f(x) \geq f(x_t) + \nabla f(x_t)^t(x-x_t) \qquad (2)$$

MULTIPLICANDO (1) POR t E (2) POR $(1-t)$, E SOMANDO, OBTEMOS

$$(1-t)f(x) + t f(y) \geq (1-t)f(x_t) + t f(x_t) + t \nabla f(x_t)^t(y-x_t)$$
$$+ (1-t)\nabla f(x_t)^t(x-x_t)$$

$$\Rightarrow (1-t)f(x) + t f(y) \geq f(x_t) + \nabla f(x_t)^t \left[t(y - x_t) + (1-t)(x - x_t) \right]$$

AGORA,

$$t(y - x_t) + (1-t)(x - x_t) = \left[(1-t)x + ty \right] - x_t = 0,$$

E ASSIM,

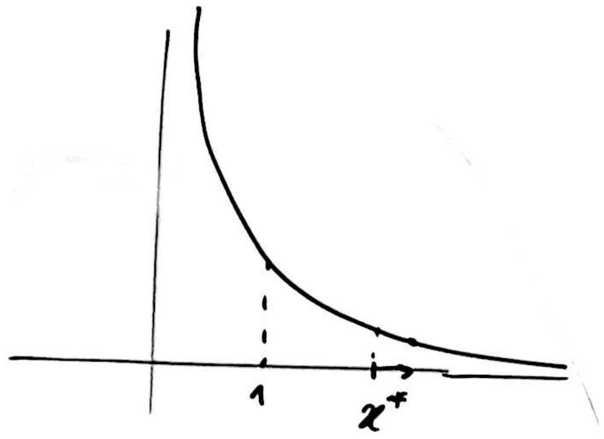
$$(1-t)f(x) + t f(y) \geq f(x_t) = f((1-t)x + ty),$$

ISTO É, f É CONVEXA. $\blacksquare$

SOBRE EXISTÊNCIA DE MINIMIZADORES

$\min \frac{1}{x}$ s.a. $x \geq 1$ NÃO POSSUI MINIMIZADOR.

DE FATO, DADO $x^* \geq 1$, $\frac{1}{x^* + t} < \frac{1}{x^*}$, $\forall t > 0$.



UMA FORMA DE GARANTIR EXISTÊNCIA DE MINIMIZADORES:

TEO. DE WEIERSTRASS: UMA FUNÇÃO CONTÍNUA $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ DEFINIDA SOBRE $D \subset \mathbb{R}^n$ LIMITADO E FECHADO POSSUI UM MINIMIZADOR GLOBAL (TAMBÉM POSSUI MAXIMIZADOR).

PROVA: CURSO DE ANÁLISE (PARA O CASO $n=1$). $\blacksquare$