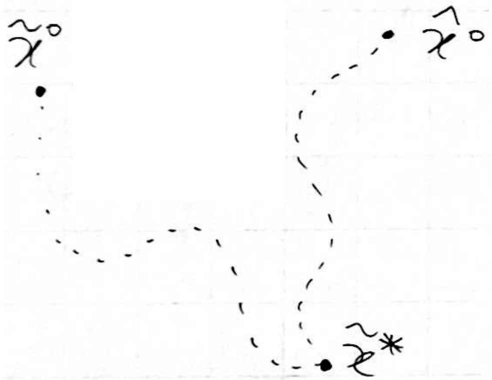
CONVERGÊNCIA GLOBAL: COMEÇANDO DE QUALQUER PONTO INICIAL x^0, O MÉTODO CAMINHA PARA UMA SOLUÇÃO x^*.

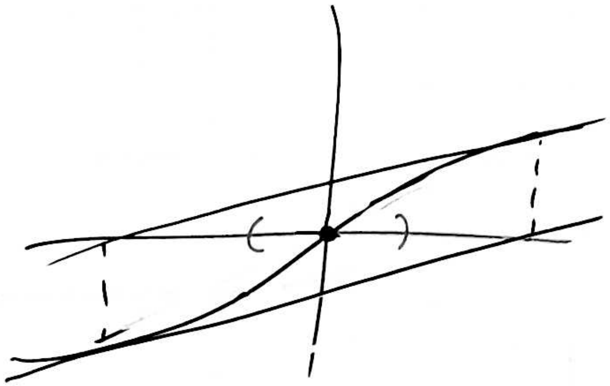
CONVERGÊNCIA LOCAL: DADA UMA SOLUÇÃO x^*, EXISTE $\varepsilon > 0$ TAL QUE, SE $\| x^0 - x^* \| \leq \varepsilon$ ENTÃO O MÉTODO CAMINHA PARA x^*.



GLOBAL

LOCAL.

O MÉTODO DE NEWTON (PURO) PODE NÃO CONVERGIR GLOBALMENTE (EXEMPLO DA AULA PASSADA).



SEJA DADA UMA FUNÇÃO $g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. DIZEMOS QUE g É <u>LIPSCHITZ (-CONTÍNUA)</u> SE EXISTE $L > 0$ TAL QUE

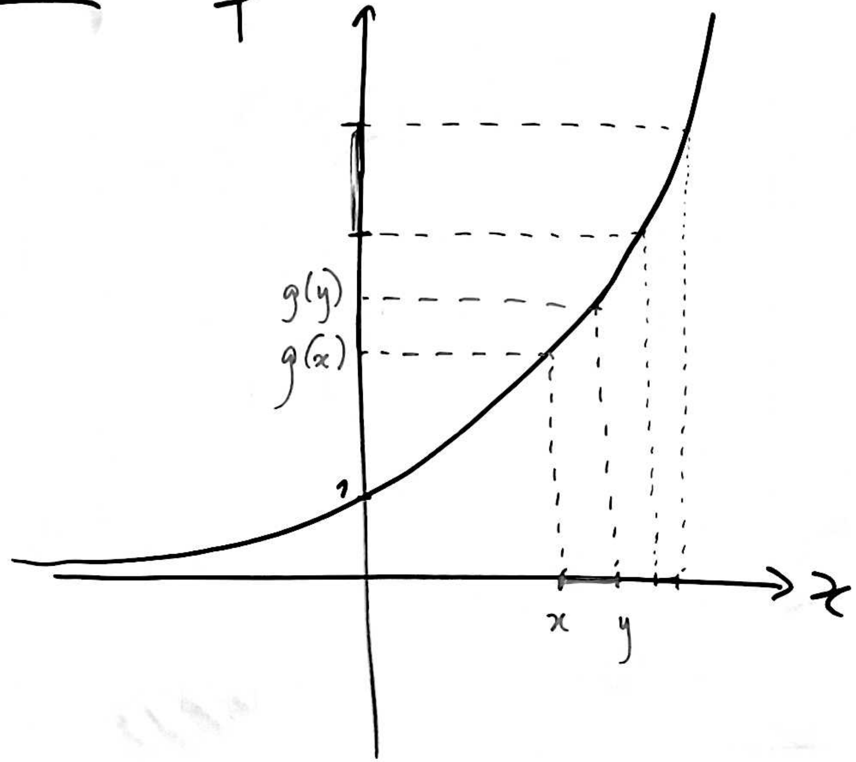
$$\|g(x) - g(y)\| \leq L \|x - y\| \quad , \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

OBS.: 1) TODA FUNÇÃO LIPSCHITZIANA É CONTÍNUA.

DE FATO, $x - y \to 0$ ENTÃO $g(x) - g(y) \to 0$.

2) NEM TODA FUNÇÃO CONTÍNUA É LIPSCHITZIANA.

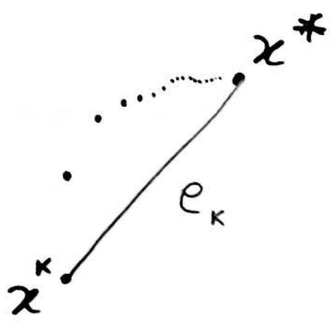
EX.: $f(x) = e^{x}$.



COMO MEDIMOS A VELOCIDADE DE UM ALGORITMO?

DISTÂNCIA ENTRE O ITERANDO DO ALGORITMO À SOLUÇÃO:
(ERRO)

$$e_k = \|x^k - x^*\|.$$



ORDEM DE CONVERGÊNCIA

SEJA $\{x^k\}$ COM $\lim_{k \to \infty} x^k = x^*$. A ORDEM DE CONVERGÊNCIA DE $\{x^k\}$ À x^* É

- **LINEAR** SE EXISTE $r \in (0,1)$ TAL QUE

$$e_{k+1} \leq r\, e_k, \quad \forall k \text{ GRANDE}.$$

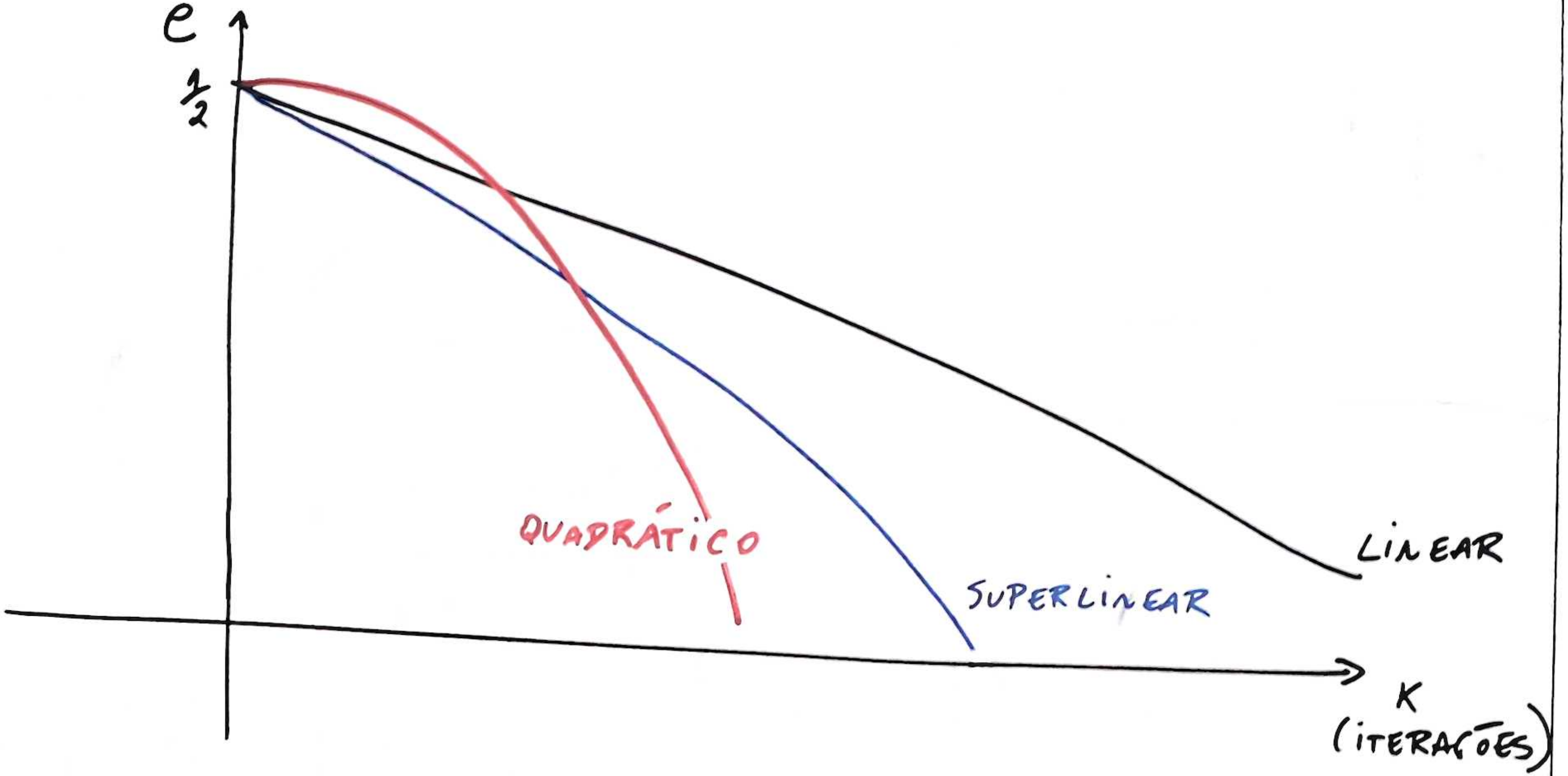
• **SUPERLINEAR** SE EXISTE $\{r_k\}$ TAL QUE $r_k > 0$, $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$

E $e_{k+1} \leq r_k e_k$, $\forall k$ GRANDE.

• **QUADRÁTICA** SE EXISTE $c > 0$ TAL QUE

$$e_{k+1} \leq c(e_k)^2, \quad \forall k \text{ GRANDE}.$$

LINEAR : $r = \frac{1}{2}$	SUPERLINEAR : $r_k = \frac{1}{k+2}$	QUADRÁTICA : $c = 1$
$e_0 = 1/2$	$e_0 = 1/2 \quad (r_0 = 1/2)$	$e_0 = 1/2$
$e_1 \leq 1/4$	$e_1 \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1/6 \quad (r_1 = 1/3)$	$e_1 \leq 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1/4$
$e_2 \leq 1/8$	$e_2 \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24} \quad (r_2 = 1/4)$	$e_2 \leq 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$
$e_3 \leq 1/16$	$e_3 \leq \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{120} \quad (r_3 = 1/5)$	$e_3 \leq 1 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^2 = \frac{1}{256}$.



- MÉTODOS DE DESCIDA COM CONVERGÊNCIA GLOBAL COSTUMAM TER ORDEM LINEAR...

- MÉTODO DE NEWTON TEM ORDEM QUADRÁTICA SE VALE UMA HIPÓTESE DE LIPSCHITZ:

Vimos que Newton não converge globalmente.

Porém, perto da solução ele é rápido (convergência quadrática)

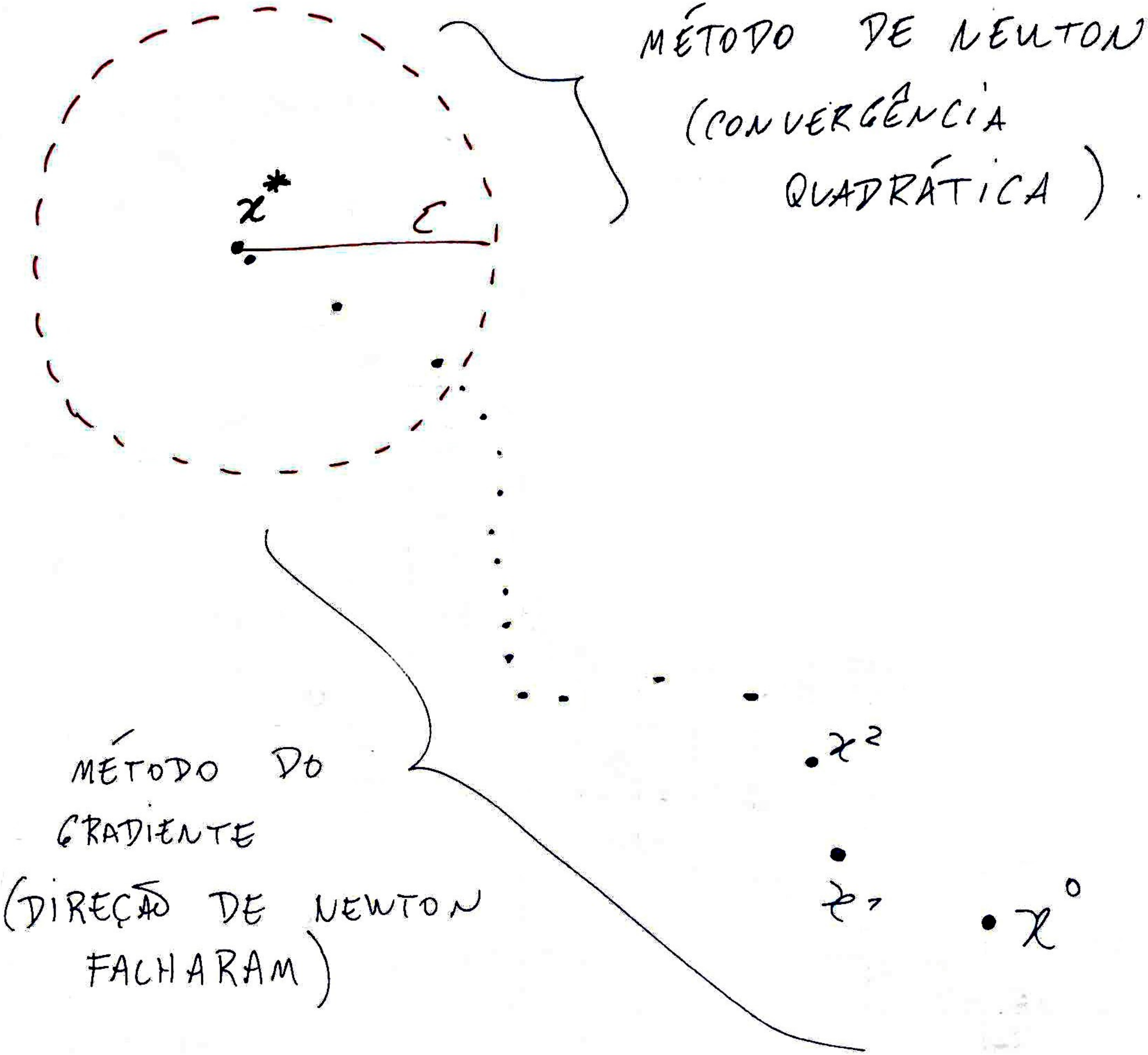
Ideia do método de descida usando Newton (aula passada):

1. Inicie com qualquer ponto x^0

2. Tente a direção de Newton. Se der certo, continue.
   Se não der certo, tome a direção do gradiente.

3. Veremos adiante que próximo à solução Newton sempre
   dá certo (mediante algumas hipóteses).

O esquema de descida se encarrega de "chegar próximo à solução", e Newton se encarrega de acelerar a convergência!



MÉTODO DE NEWTON
(CONVERGÊNCIA QUADRÁTICA).
x^*
c
MÉTODO DO GRADIENTE
(DIREÇÃO DE NEWTON FALHARAM)
x^2
x^1
x^0