OTIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÕES

PROBLEMA DE PRO-GRAMAÇÃO NÃO LINEAR (PNL)

$$\left\{\begin{array}{lll} \min & f(x) & \longleftarrow \text{FUNÇÃO OBJETIVO (F.O.)} \\ \text{s.a.} & h(x) = 0 & \longleftarrow \text{RESTRIÇÕES DE IGUALDADE} \\ & g(x) \leq 0 & \longleftarrow \text{" " DESIGUALDADE.} \end{array}\right.$$

EXEMPLOS:

1) (PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR)

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.a.} & Ax = b \\ & Cx \leq d \end{array}$$

2) (PROB. DE PROG. QUADRÁTICA)

$$\min \frac{1}{2} x^T A x + b^T x \qquad \text{(A SIMÉTRICA).}$$

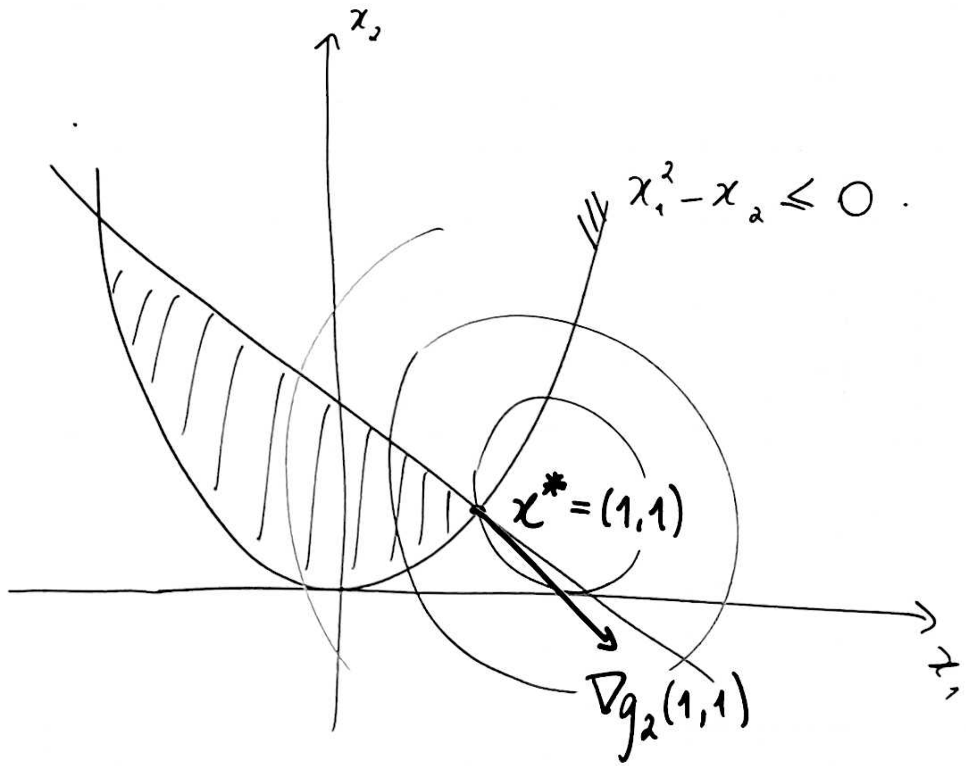
$$\text{s.a.} \quad Ax = b$$
$$Cx \leq d$$

---

3) $$\min (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$$

$$\text{s.a.} \quad x_1 + x_2 - 2 \leq 0$$
$$x_1^2 - x_2 \leq 0$$

$$\begin{bmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



NOTAÇÃO:

- $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n ; \; h(x) = 0 \; , \; g(x) \leq 0\}$

  É O CONJUNTO VIÁVEL DE PNL.

- $x \in \Omega$ É UM PONTO VIÁVEL (PONTO FACTÍVEL).

- DEFINIÇÕES USUAIS DE MINIMIZADORES LOCAIS / GLOBAIS.

  (SOLUÇÕES ÓTIMAS LOCAIS / GLOBAIS).

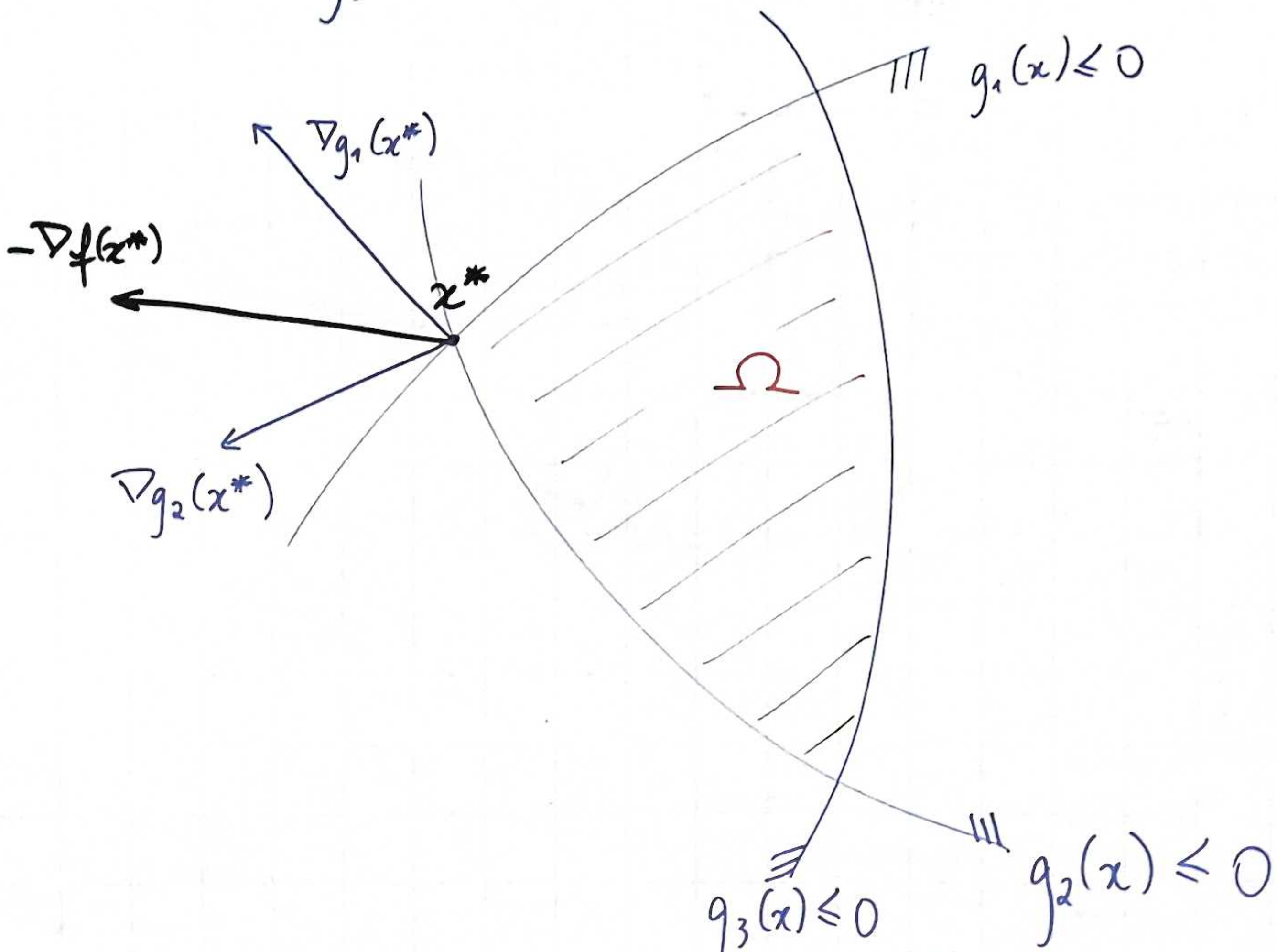
OTIMIZAÇÃO IRRESTRITA $(\min f(x))$: $\nabla f(x^*) = 0$.

" RESTRITA ; ADAPTAR $\nabla f(x^*) = 0$ ...

(CONDIÇÃO NECESSÁRIA DE OTIMALIDADE).

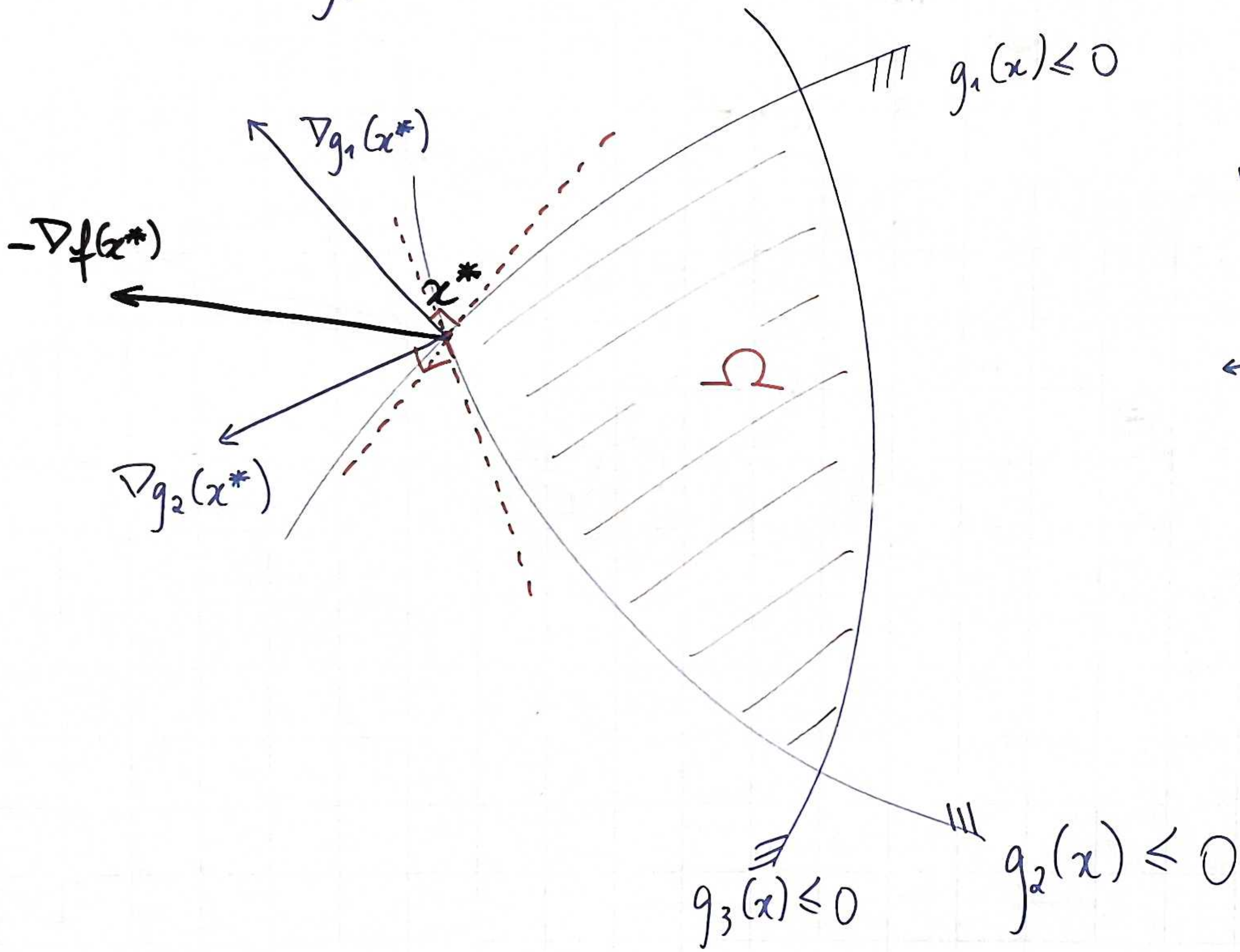
CASO PARTICULAR:

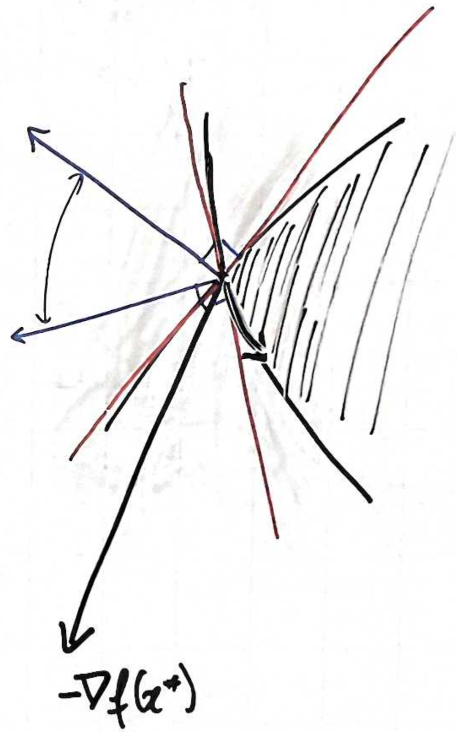
$$\min f(x)$$
$$\text{s.a. } g_1(x) \le 0 \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$
$$g_2(x) \le 0$$
$$g_3(x) \le 0$$



CASO PARTICULAR:

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) \\ \text{s.a.}\ & g_1(x) \leq 0 \\ & g_2(x) \leq 0 \\ & g_3(x) \leq 0 \end{aligned} \qquad x \in \mathbb{R}^2 .$$





* f DECRESCE (LOCALMENTE) NA DIREÇÃO $-\nabla f(x^*)$, DADO QUE $-\nabla f(x^*)$ É DIREÇÃO DE DESCIDA $\left(-\nabla f(x^*)^T \nabla f(x^*) = -\|\nabla f(x^*)\|^2 < 0\right)$

* SE CAMINHAMOS NA DIREÇÃO $-\nabla f(x^*)$, SAÍMOS DO CONJUNTO VIÁVEL Ω ...

$\longrightarrow$ x^* É UM MINIMIZADOR LOCAL ...

* SE CAMINHARMOS EM QUALQUER DIREÇÃO ENTRE $\nabla g_1(x^*)$ E $\nabla g_2(x^*)$, SAÍMOS DE Ω. MAS SE CAMINHARMOS EM UMA DIREÇÃO PARA FORA DO CONE FORMADO POR ∇g_1 E ∇g_2, CONSEGUIMOS DIMINUIR f COM <u>PONTOS VIÁVEIS</u>.

** $\quad -\nabla f(x^*) = \mu_1 \nabla g_1(x^*) + \mu_2 \nabla g_2(x^*), \quad \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0$

OU SEJA,

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla f(x^*) + \mu_1 \nabla g_1(x^*) + \mu_2 \nabla g(x^*) + \mu_3 \nabla g_3(x^*) = 0 \,, \\
&\mu_1 \geq 0 \,, \quad \mu_2 \geq 0 \,, \quad \mu_3 \geq 0 \,, \\
&\mu_1 g_1(x^*) = 0 \,, \quad \mu_2 g_2(x^*) = 0 \,, \quad \mu_3 g_3(x^*) = 0 \,.
\end{aligned}\right\} (*)$$

NA FIGURA, $g_1(x^*) = g_2(x^*) = 0$ (PARTICIPAM DA "DESCRIÇÃO" DE x^*) E $g_3(x^*) < 0$ (NÃO PARTICIPA).

- → g_1 E g_2 SÃO ATIVAS EM x^*
- → g_3 É INATIVA EM x^*.

$I(x^*) = \{ i \; ; \; g_i(x^*) = 0 \}$: CONJUNTO DOS ÍNDICES DAS RESTRIÇÕES DE DESIG. ATIVAS EM x^*.

(*) PODE SER ESCRITO COMO:

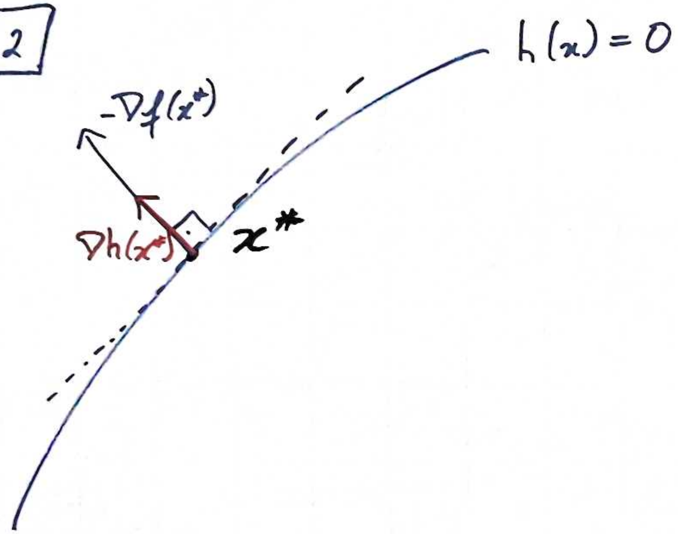
$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i \nabla g_i(x^*) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ \mu_i g_i(x^*) = 0 \, , \; \forall i \quad \} \text{ COMPLEMENTARIDADE.} \end{cases}$$

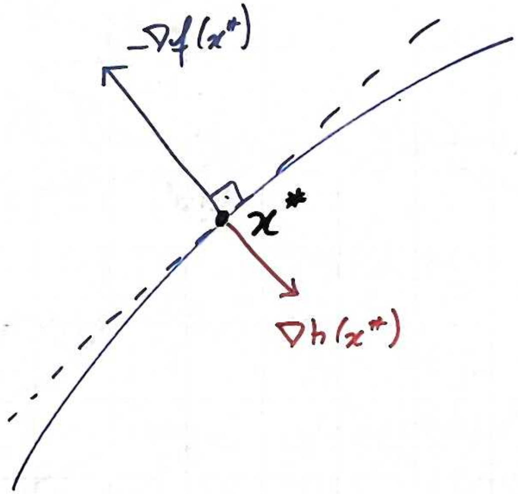
OU

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{i \in I(x^*)} \mu_i \nabla g_i(x^*) = 0 \\ \mu_i \geq 0 \, , \; i \in I(x^*) \end{cases}$$

IGUALDADES $(h(x) = 0)$:

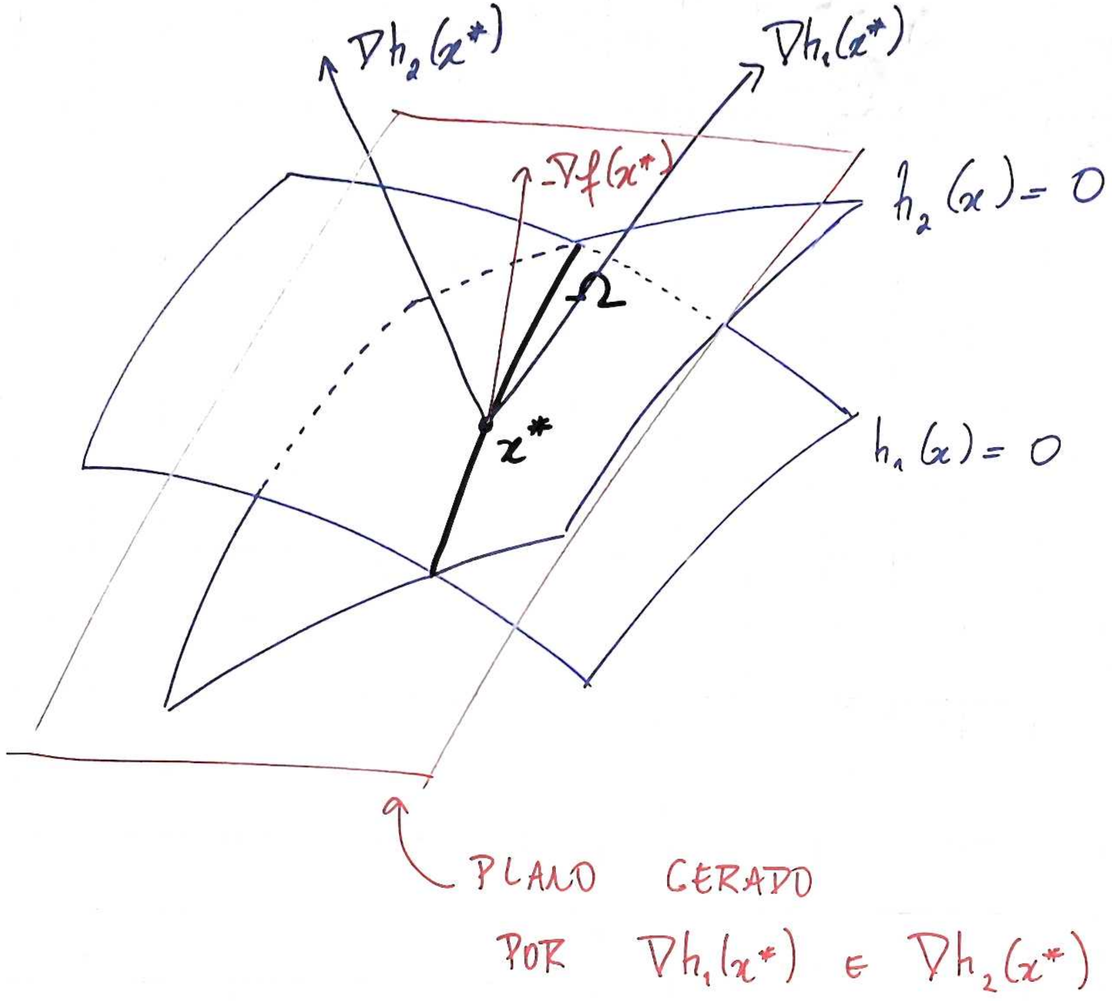
$\boxed{n = 2}$





$$-\nabla f(x^*) = \lambda \nabla h(x^*), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{n = 3}$



$$-\nabla f(x^*) = \lambda_1 \nabla h_1(x^*) + \lambda_2 \nabla h_2(x^*) \quad , \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

JUNTANDO TUDO...

(x^* VIÁVEL)

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0 \\ \mu \geqslant 0 \\ \mu_j \, g_j(x^*) = 0 \quad , \forall j . \end{cases}$$

λ E μ SÃO OS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE.

ESSAS SÃO AS CONDIÇÕES DE KARUSH-KUHN-TUCKER (KKT)

OBS.: QUANDO NÃO HÁ RESTRIÇÕES, AS CONDIÇÕES KKT SE REDUZEM À $\nabla f(x^*) = 0$.

EXEMPLO:

$$\min \quad (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \qquad (f)$$

$$\text{s.a.} \quad x_1 + x_2 - 2 \leq 0 \qquad (g_1)$$

$$x_1^2 - x_2 \leq 0 \qquad (g_2)$$

KKT:

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \mu_1 \nabla g_1(x^*) + \mu_2 \nabla g_2(x^*) = 0 \\ \mu_1 \geq 0 \,, \quad \mu_2 \geq 0 \\ \mu_1 g_1(x^*) = 0 \,, \quad \mu_2 g_2(x^*) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2(x_1-2) \\ 2(x_2-1) \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \qquad (1)$$

$$\mu_1 \geq 0 \ , \quad \mu_2 \geq 0 \qquad (2)$$

$$\mu_1 (x_1 + x_2 - 2) = 0 \quad , \quad \mu_2 (x_1^2 - x_2) = 0 \ . \qquad (3)$$

CASO 1: $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$. "DÁ ERRADO :"

(2) E (3) VALEM. DE (1), OBTEMOS $x = (2, 1)$.

PORÉM, x NÃO É VIÁVEL $(x_1 + x_2 - 2 = 1 > 0)$.

CASO 2: $\mu_1 = 0$, $\mu_2 > 0$.

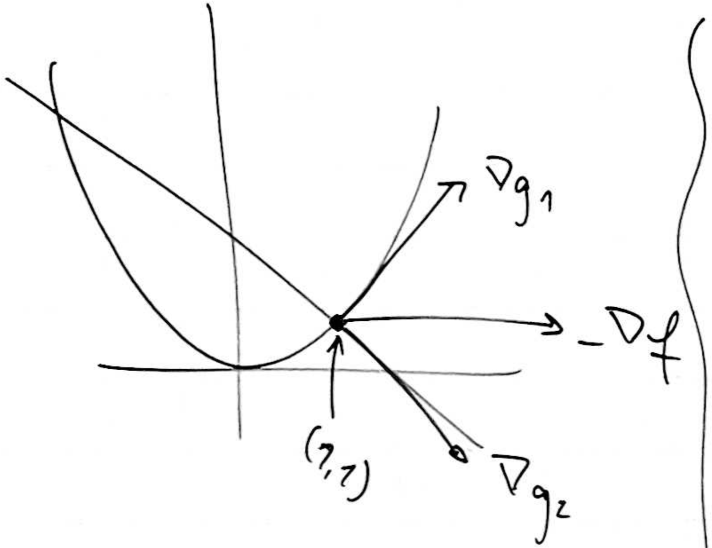
(VAI DAR ERRADO :(FAÇA!)

CASO 3: $\mu_1 > 0$, $\mu_2 = 0$

(VAI DAR ERRADO :(FAÇA!)

CASO 4: $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ $\longrightarrow$ DÁ CERTO ;)

ESSE CASO ADMITE A SOLUÇÃO $x^* = (1,1)$.



- x^* É VIÁVEL.
- x^* É KKT:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 0, \quad \mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0$$

$\hookrightarrow$ MULTIPLICADORES: $\mu_1 = \mu_2 = \frac{2}{3} > 0$.

CONDIÇÕES DE KARUSH-KUHN-TUCKER (KKT)

(CONTINUAÇÃO).

MINIMIZAÇÃO IRRESTRITA: $\min f(x)$.

$\rightarrow$ x^* É MINIMIZADOR $\Longrightarrow$ $\nabla f(x^*) = 0$.

$\rightarrow$ $\nabla f(x^*) = 0 \not\Longrightarrow$ x^* É MINIMIZADOR. (P. EX., $f(x) = -x^2$, $x^* = 0$).

$\rightarrow$ SE f É CONVEXA,

$\nabla f(x^*) = 0 \Longrightarrow x^*$ É MINIMIZADOR.

<u>OBJETIVO</u>: VERIFICAR ESSAS AFIRMAÇÕES PARA OTIMIZAÇÃO RESTRITA (KKT).

$$\left.\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.a.} & h(x)=0 \\ & g(x)\leq 0. \end{array}\right\} \text{"PNL"}.$$

x^* É KKT SE É VIÁVEL $(h(x^*)=0,\ g(x^*)\leq 0)$

E SE EXISTEM $\mu \in \mathbb{R}^p$ E $\lambda \in \mathbb{R}^m$ TAIS QUE

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0 \\ \mu_j \geq 0, \quad \forall j \\ \mu_j\, g_j(x^*) = 0, \quad \forall j. \end{cases}$$

SE x^* É MINIMIZADOR DE PNL, ENTÃO x^* É KKT ???

EXEMPLO 1: $\min x$

$$\text{s.a. } x^2 \leq 0 .$$

$x^* = 0$ É O ÚNICO MINIMIZADOR, DADO QUE É O ÚNICO PONTO VIÁVEL.

KKT: $1 + \mu 2x = 0 , \quad \mu \geq 0 , \quad \mu x^2 = 0 .$

PARA $x^* = 0$, A PRIMEIRA EQUAÇÃO NÃO VALE PARA QUALQUER $\mu \geq 0$. OU SEJA, $x^* = 0$ NÃO É KKT.

RESPOSTA: NÃO!

O QUE FALTA PARA x^* SER KKT SEMPRE ?

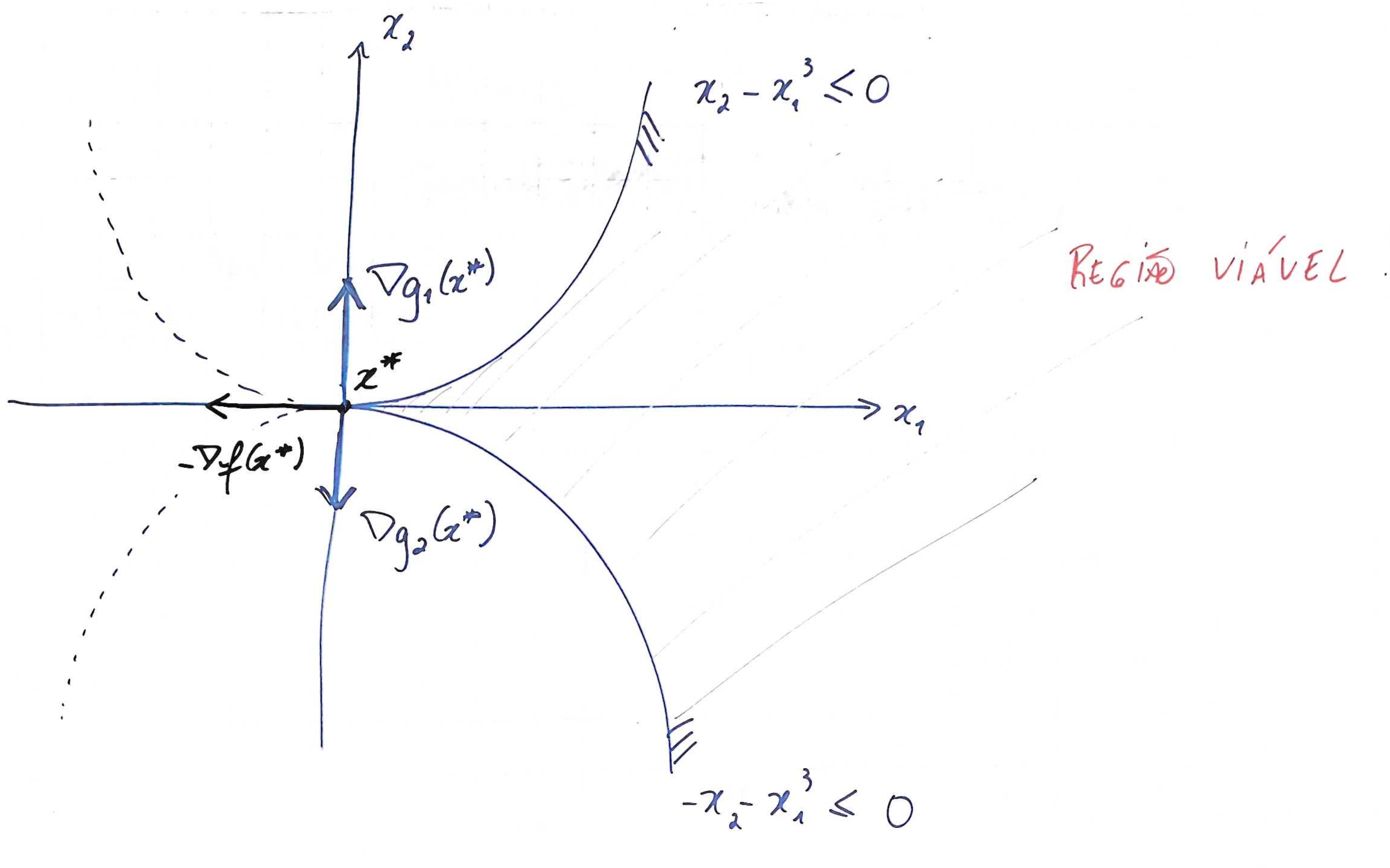
NO EXEMPLO, A DERIVADA DA RESTRIÇÃO $g(x) = x^2$ É NULA EM x^* ...

O PROBLEMA É QUE "OS GRADIENTES DAS RESTRIÇÕES $h(x) = 0$ E DAS RESTRIÇÕES DE DESIGUALDADE $\underbrace{g_j(x) \leq 0 \text{ ATIVAS EM } x^*}$ $(g_j(x^*) = 0)$ SÃO L.D."

EXEMPLO 2: $\min \; x_1$

$$\text{s.a.} \quad x_2 - x_1^3 \leq 0$$

$$-x_2 - x_1^3 \leq 0$$



$x^* = (0,0)$ É O MINIMIZADOR.

KKT:

$$\left.\begin{array}{l} g_1(0,0) = 0 \\ g_2(0,0) = 0 \end{array}\right\} \quad g_1 \text{ E } g_2 \text{ SÃO ATIVAS EM } (0,0).$$

$$\nabla f(0,0) + \mu_1 \nabla g_1(0,0) + \mu_2 \nabla g_2(0,0) = 0 \quad , \quad \mu_1, \mu_2 \geq 0.$$

$$\mu_1 g_1(0,0) = \mu_2 g_2(0,0) = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mu_1, \mu_2 \geq 0.$$

É IMPOSSÍVEL $\Longrightarrow$ $x^* = (0,0)$ NÃO É KKT.

PROBLEMA: $\nabla g_1(0,0)$ E $\nabla g_2(0,0)$ SÃO L.D's.

DEFINIÇÃO: UM PONTO VIÁVEL x^* É <u>REGULAR</u> SE OS GRADIENTES

$$\nabla h_i(x^*), \ \forall i \quad \text{E}$$

$$\nabla g_j(x^*), \ \forall j \ \text{TAL QUE} \ g_j(x^*)=0$$

SÃO L.I.'s.

TEOREMA: SEJA x^* UM MINIMIZADOR DE PNL. SE x^* É REGULAR, ENTÃO É x^* É KKT.

(MIN. + <u>REGULARIDADE</u> $\Longrightarrow$ KKT)

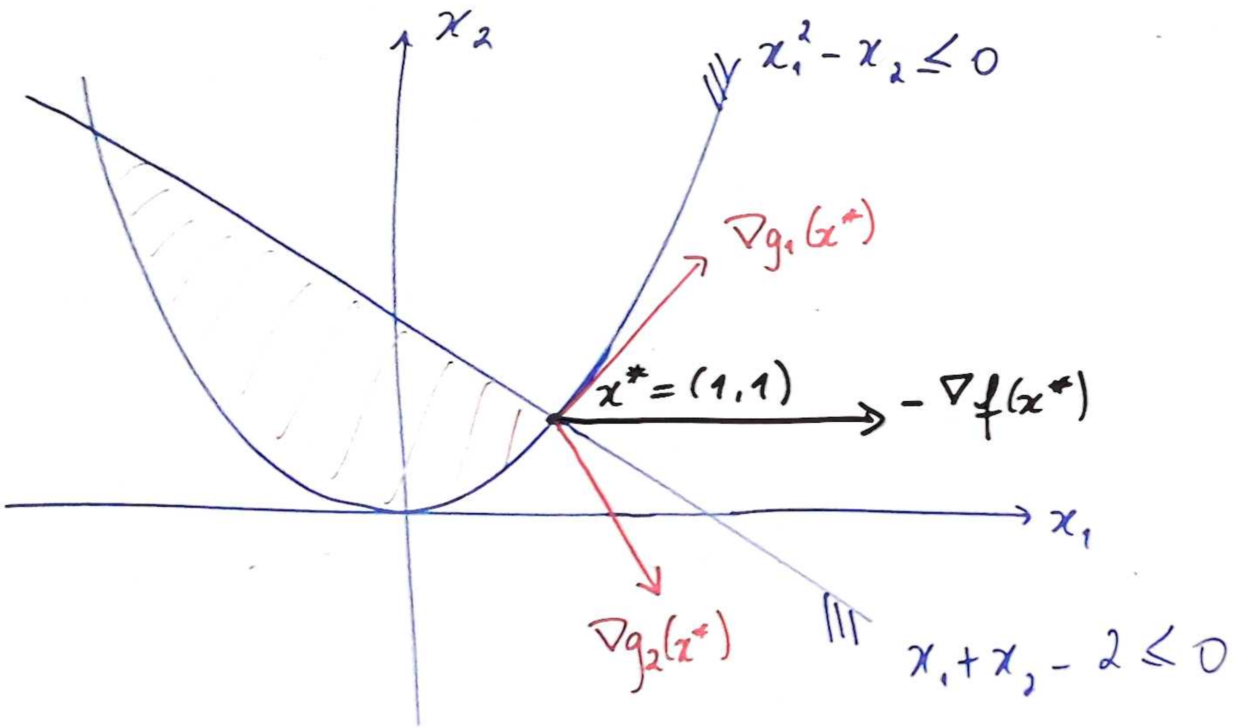
OBS.: É POSSÍVEL ENFRAQUECER A HIPÓTESE DE REGULARIDADE.

EXEMPLO:

$$\min \ (x_1-1)^2+(x_2-2)^2$$

$$\text{s.a.} \quad x_1+x_2-2 \leq 0$$

$$x_1^2-x_2 \leq 0 .$$



O MINIMIZADOR $x^* = (1,1)$ É KKT:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad , \quad \mu_1, \mu_2 \geq 0 \qquad (*)$$

$$\mu_1 (x_1^* + x_2^* - 2) = 0 \quad , \quad \mu_2 ((x_1^*)^2 - x_2^*) = 0 .$$

$\checkmark$ $\checkmark$

A SOLUÇÃO DE $(*)$ É $\mu_1 = 2/3$, $\mu_2 = 2/3$.

OBSERVE QUE OS GRADIENTES $\nabla g_1(x^*) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ E $\nabla g_2(x^*) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ SÃO L.I.'s (g_1 E g_2 SÃO ATIVAS EM x^*)

KKT E CONVEXIDADE

PNL: $\min f(x)$

$\text{s.a. } h(x) = 0$

$g(x) \leq 0$.

PNL CONVEXO: f E g_j SÃO CONVEXAS,

h_i SÃO LINEARES

TEOREMA (KKT É SUFICIENTE PARA OTIMALIDADE EM PROBLEMAS CONVEXOS)

SEJA UM PNL CONVEXO. SE x^* É KKT ENTÃO x^* É UM MINIMIZADOR (GLOBAL).

IDEIA DA PROVA (EXERCÍCIO).

1) POR HIPÓTESE, x^* É KKT. ENTÃO EXISTEM μ E λ TAIS QUE

$$Df(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i Dh_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j Dg_j(x^*) = 0, \quad (*)$$

$\mu_j \geq 0$, $\forall j$, E $\mu_j g_j(x^*) = 0$, $\forall j$.

2) MULTIPLIQUE POR $(x - x^*)$, ONDE x É UM PONTO VIÁVEL QUALQUER.

3) USE O FATO QUE $z(x) - z(x^*) \geq Dz(x^*)^T (x - x^*)$ QUANDO z É CONVEXA.

4) USE A VIABILIDADE DE x E x^* PARA CONCLUIR QUE $f(x) \geq f(x^*)$ //

EXEMPLO (PROGRAMAÇÃO LINEAR).

$$\begin{aligned} PL: \min\ & v^T x \\ \text{s.a.}\ & Ax - b = 0 \\ & Cx - d \leq 0 \end{aligned}$$

PL É CONVEXO. LOGO, SE x^* É KKT ENTÃO x^* É MINIMIZADOR (GLOBAL) DE PL.

KKT:

$$\begin{aligned} v + A^T\lambda + C^T\mu &= 0 \\ \mu &\geq 0 \\ \mu^T(Cx - d) &= 0 \end{aligned}$$

ESSE SISTEMA KKT É RELATIVAMENTE SIMPLES. O "ÚNICO" COMPLICADOR É A CONDIÇÃO $\mu^T(Cx-d)=0$.

<u>OBS.</u>: SE NÃO HÁ DESIGUALDADES,

$$\begin{aligned} &\min \ v^T x \\ &\text{s.a.} \ Ax = b, \end{aligned}$$

ENTÃO KKT É <u>MUITO</u> SIMPLES:

$$v + A^T\lambda = 0 \quad \text{(UM SISTEMA LINEAR EM } \lambda\text{)}.$$

INSERINDO FOLGAS, PL PODE SER ESCRITO COMO

$$\min \ v^T x \quad \text{s.a.} \quad Ax = b, \ x \geq 0.$$

$\underline{\text{KKT}}$: $\begin{cases} v + A^T\lambda - \mu = 0 \\ \mu \geq 0 \\ \mu^T x = 0 \end{cases}$

$(Ax = b, \ x \geq 0)$

$$\begin{cases} \mu = v + A^T\lambda \geq 0 \\ \mu^T x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v + A^T\lambda \geq 0 \\ (v + A^T\lambda)^T x = 0 \end{cases}$$

MÉTODO INSPIRADO NESSE SISTEMA KKT:

"MÉTODO DOS PONTOS INTERIORES"

(CPLEX, GUROBI ETC...)