MINIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÕES LINEARES DE IGUALDADE

REF.: LIVRO DE ANA FRIEDLANDER.

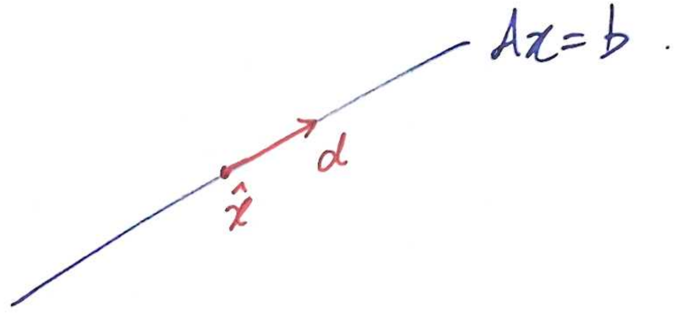
$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\text{s.a.} \quad Ax = b \end{aligned} \quad , \quad A \ m \times n , \quad \underline{m < n}.$$

ADMITIMOS QUE ESTE PROBLEMA TEM MINIMIZADOR.

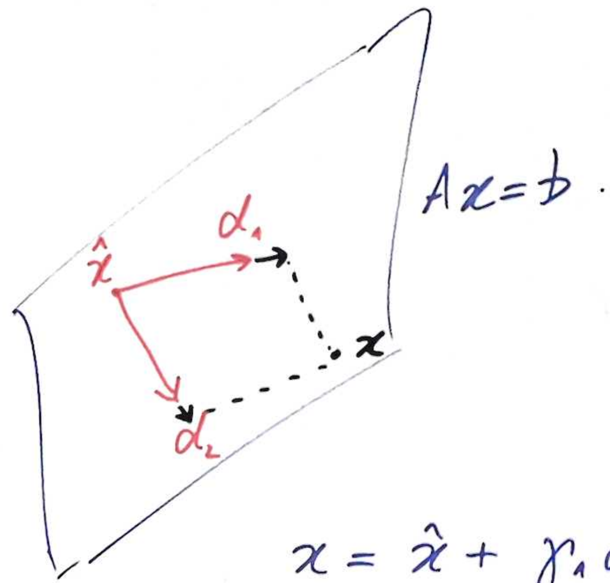
CONJUNTO VIÁVEL

$$\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^n \,;\, Ax = b \}.$$

CONSIDERE $\hat{x}$ UMA SOLUÇÃO QUALQUER DE $Ax = b$.



$$x = \hat{x} + \rho d$$



$$x = \hat{x} + \rho_1 d_1 + \rho_2 d_2$$

$$\boxed{Ad = 0}.$$

$$\boxed{Ad_1 = 0 \quad , \quad Ad_2 = 0}$$

MAIS GERALMENTE, TEMOS

$$\Omega = \hat{x} + Nu(A) \quad , \quad \text{ONDE}$$

$$Nu(A) = \text{"NÚCLEO DE } A\text{"} = \{ d \in \mathbb{R}^n \, ; \, Ad = 0 \}.$$

DE FATO, TOME $x \in \Omega$ VIÁVEL. TEMOS

$$x = \hat{x} + (x - \hat{x}).$$

OBSERVE QUE $A(x-\hat{x}) = Ax - A\hat{x} = b - b = 0$, ISTO É, $x - \hat{x} \in Nu(A)$. ASSIM, $x \in \hat{x} + Nu(A)$.

POR OUTRO LADO, SE $\hat{x} + d \in \hat{x} + Nu(A)$ ENTÃO $A(\hat{x}+d) = A\hat{x} + Ad = b + 0 = b$. OU SEJA, $\hat{x}+d \in \Omega$.

LOGO, CONCLUÍMOS QUE $\Omega = \hat{x} + Nu(A)$.

DAÍ, SE $\{z_1, \ldots, z_{n-m}\}$ É UMA BASE DE $Nu(A)$ ENTÃO QUALQUER VETOR DE $\hat{x} + Nu(A)$ É ESCRITO COMO

$$\hat{x} + \gamma_1 z_1 + \cdots + \gamma_{n-m} z_{n-m}.$$

CHAMANDO

$$Z = \begin{bmatrix} | & & | \\ z_1 & \cdots & z_{n-m} \\ | & & | \end{bmatrix} \quad (n \times n-m) \; ,$$

ESCREVEMOS

$$x = \hat{x} + Zp = \hat{x} + p_1 \begin{bmatrix} z_{11} \\ \vdots \\ z_{1n} \end{bmatrix} + p_2 \begin{bmatrix} z_{21} \\ \vdots \\ z_{2n} \end{bmatrix} + \cdots + p_{n-m} \begin{bmatrix} z_{n-m,1} \\ \vdots \\ z_{n-m,n} \end{bmatrix}$$

ASSIM,

$$\boxed{\Omega = \{ \hat{x} + Zp \; ; \; p \in \mathbb{R}^{n-m} \}.}$$

O PROBLEMA

$$\min f(x)$$
$$\text{s.a. } Ax = b$$

PODE SER REFORMULADO COMO

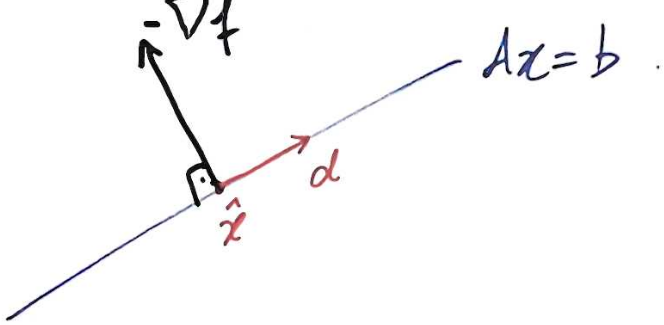
$$\min_{p \in \mathbb{R}^{n-m}} \varphi(p) = f(\hat{x} + Zp).$$

(PROBLEMA IRRESTRITO COM $n-m < n$ VARIÁVEIS)

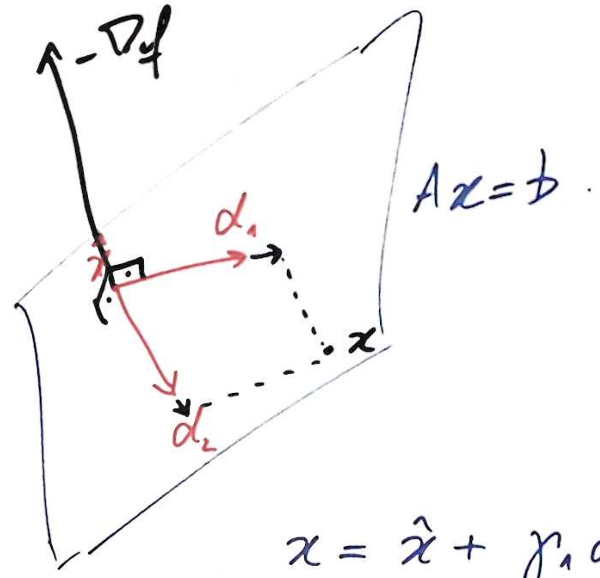
RESOLVENDO: $\nabla_p \varphi(p) = 0$.

$$\nabla \varphi(p) = Z^T \nabla f(\hat{x} + Zp) = Z^T \nabla f(x).$$

$$\boxed{Z^T \nabla f(x) = 0}$$



$$x = \hat{x} + \rho d$$



$$x = \hat{x} + \rho_1 d_1 + \rho_2 d_2$$

GEOMETRICAMENTE, $Z^T \nabla f(x) = 0$ SIGNIFICA QUE $\nabla f(x)$ É ORTOGONAL AO NÚCLEO DE A.

UM MÉTODO DE DESCIDA PARA MINIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÕES LINEARES DE IGUALDADE.

- SE x^k É TAL QUE $Ax^k = b$ E $Z^T \nabla f(x^k) = 0$, PARE!

• CONSIDERAR O CASO EM QUE $Ax^k = b$, MAS

$$Z^T \nabla f(x^k) \neq 0.$$

IDEIA DO ESQUEMA DE DESCIDA:

$$x^{k+1} = x^k + t_k d^k \quad , \quad t_k > 0.$$

QUEREMOS QUE O PONTO x^{k+1} (APÓS O PASSO) TAMBÉM SEJA VIÁVEL ($Ax^{k+1} = b$).

VEJA QUE

$$A x^{k+1} = A(x^k + t_k d^k) = \underbrace{Ax^k}_{b} + t_k A d^k = b$$

$$\iff A d^k = 0 \iff d^k \in Nu(A).$$ ASSIM, $\boxed{d^k = Z p^k}$

ESTA $d^k = Z p^k$ MANTÉM VIABILIDADE ...

QUEREMOS QUE d^k SEJA DE DESCIDA!

$$\nabla f(x^k)^T d^k < 0 \iff \nabla f(x^k)^T [Z p^k] < 0$$

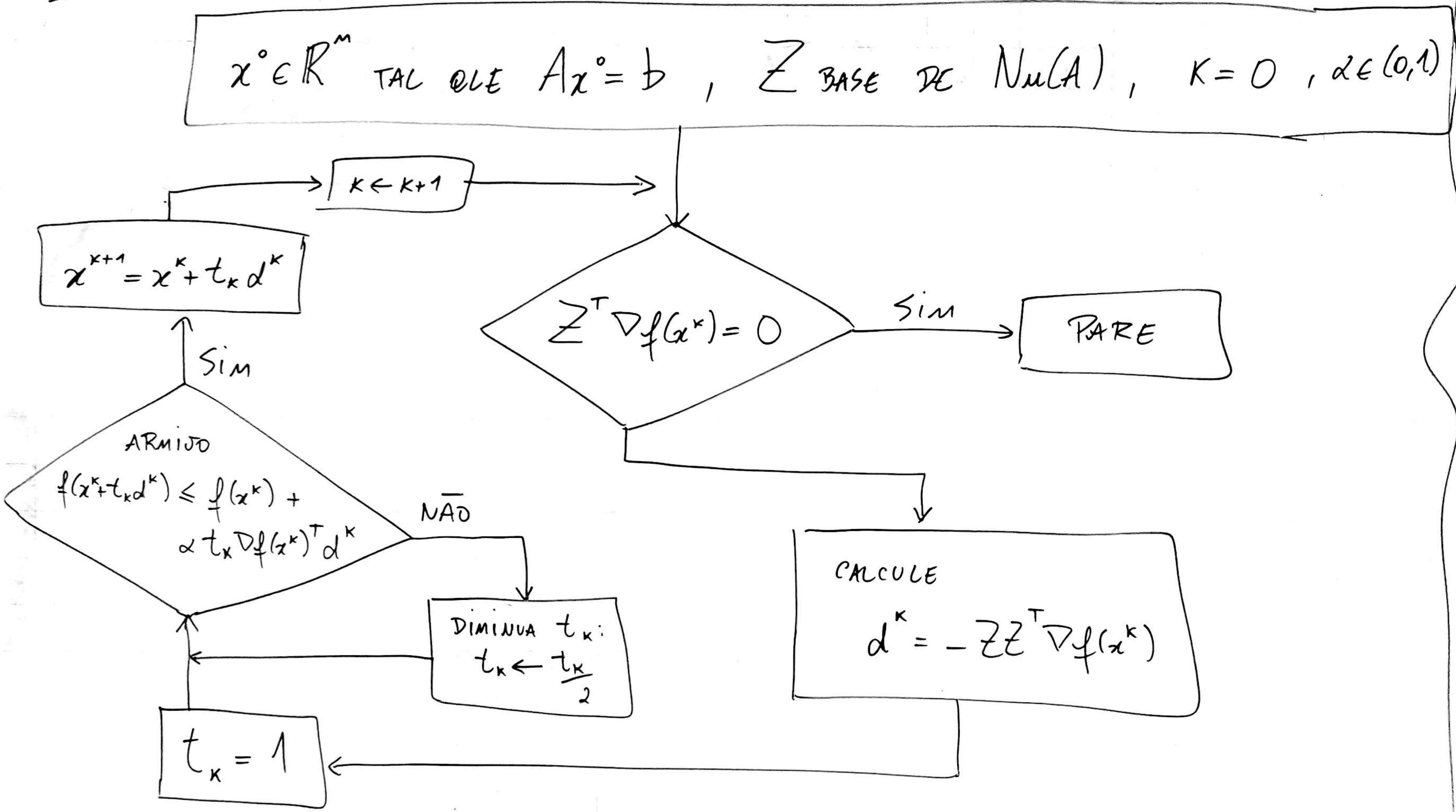
$$\iff \left[Z^T \nabla f(x^k)\right]^T p^k < 0$$

$$\iff \nabla \varphi(0)^T p^k < 0 \, , \quad \text{ONDE} \quad \varphi(p) = f(x^k + Z p)$$

ESCOLHEMOS $p^k = -\nabla \varphi(0) = -Z^T \nabla f(x^k)$. OU SEJA,

$$\boxed{d^k = -Z Z^T \nabla f(x^k)}\, .$$

MÉTODO


$x^0 \in \mathbb{R}^n$ TAL QUE $Ax^0 = b$, Z BASE DE $Nu(A)$, $k = 0$, $\alpha \in (0,1)$
$k \leftarrow k+1$
$x^{k+1} = x^k + t_k d^k$
$Z^T \nabla f(x^k) = 0$
SIM
PARE
SIM
ARMIJO
$f(x^k + t_k d^k) \leq f(x^k) + \alpha t_k \nabla f(x^k)^T d^k$
NÃO
DIMINUA t_k: $t_k \leftarrow \frac{t_k}{2}$
CALCULE
$d^k = -ZZ^T \nabla f(x^k)$
$t_k = 1$

INICIALIZAÇÃO:

- x^0 PODE SER CALCULADO ATRAVÉS DE QUALQUER MÉTODO QUE RESOLVA SISTEMAS LINEARES. (DISCIPLINA MÉTODOS NUMÉRICOS I).

- Z PODE SER CALCULADA POR

  ELIMINAÇÃO GAUSSIANA + $\underbrace{\text{CAMBIARRAS}}_{\text{EVITAM PROBLEMAS NUMÉRICOS}}$.

PACOTES EFICIENTES (C / FORTRAN): LAPACK, HSL.