PENALIZAÇÃO INTERNA / MÉTODO DE BARREIRAS / PONTOS INTERIORES.

<u>REFERÊNCIA</u>: MARTÍNEZ, SANTOS. MÉTODOS COMPUTACIONAIS DE OTIMIZAÇÃO, UNICAMP. (VER LINK NA PÁGINA DA DISCIPLINA).

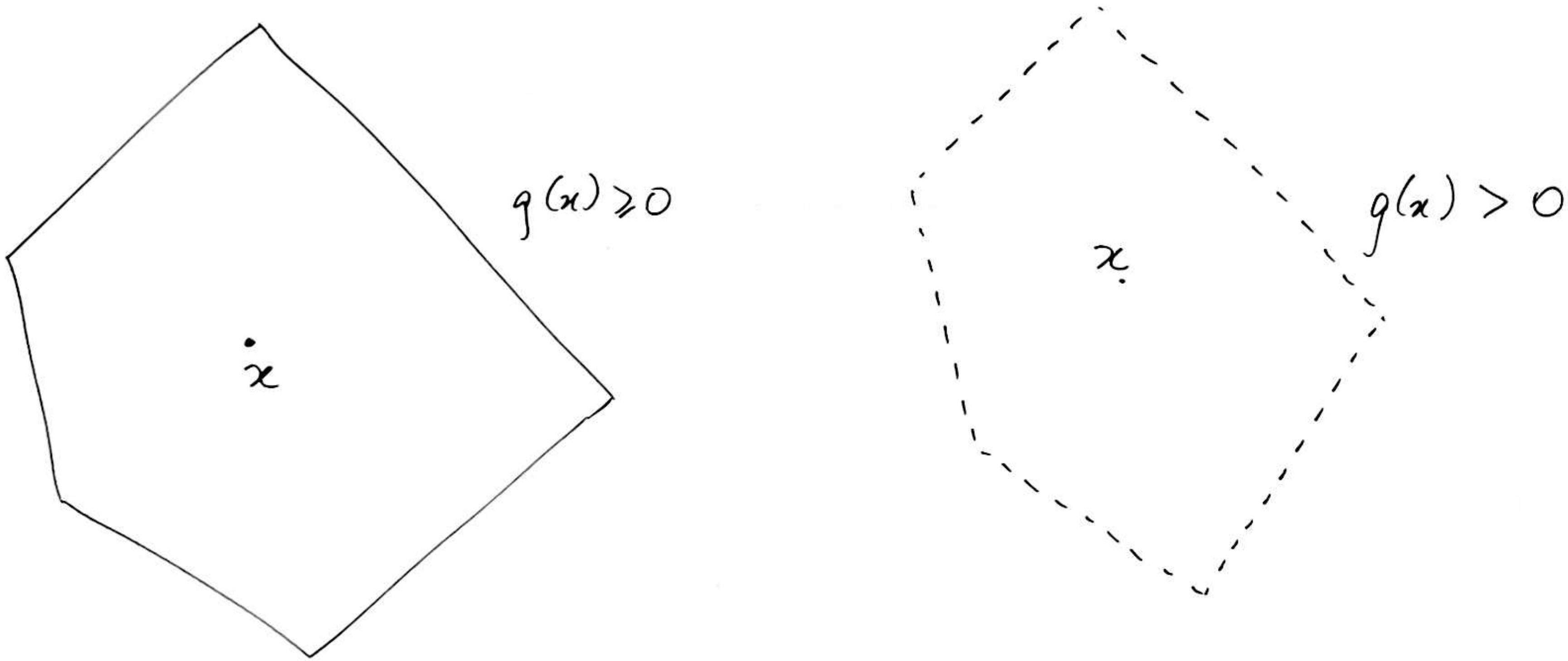
$$
\begin{aligned}
P:\quad & \min f(x) \\
& \text{s.a.}\ \ g(x) \geq 0, \\
& \qquad x \in D, \qquad D \subset \mathbb{R}^n \text{ É COMPACTO.}
\end{aligned}
$$

<u>OBS.</u>: AS RESTRIÇÕES $g(x) \geq 0$ PODEM SER EXPRESSAS NA FORMA PADRÃO $-g(x) \leq 0$.

CONJUNTO VIÁVEL: $\Omega = \{x \in D \,;\, g(x) \geq 0\}$.

INTERIOR (RELATIVO): $\Omega^\circ = \{x \in D \,;\, g(x) > 0\}$.

$\hookrightarrow$ DESCARTA A FRONTEIRA $g(x) = 0$.



HIPÓTESE: $\Omega^\circ \neq \emptyset$.

<u>IDEIA</u>: RESOLVER UMA SEQUÊNCIA DE SUBPROBLEMAS ONDE A "VIABILIDADE ESTRITA" É PENALIZADA.

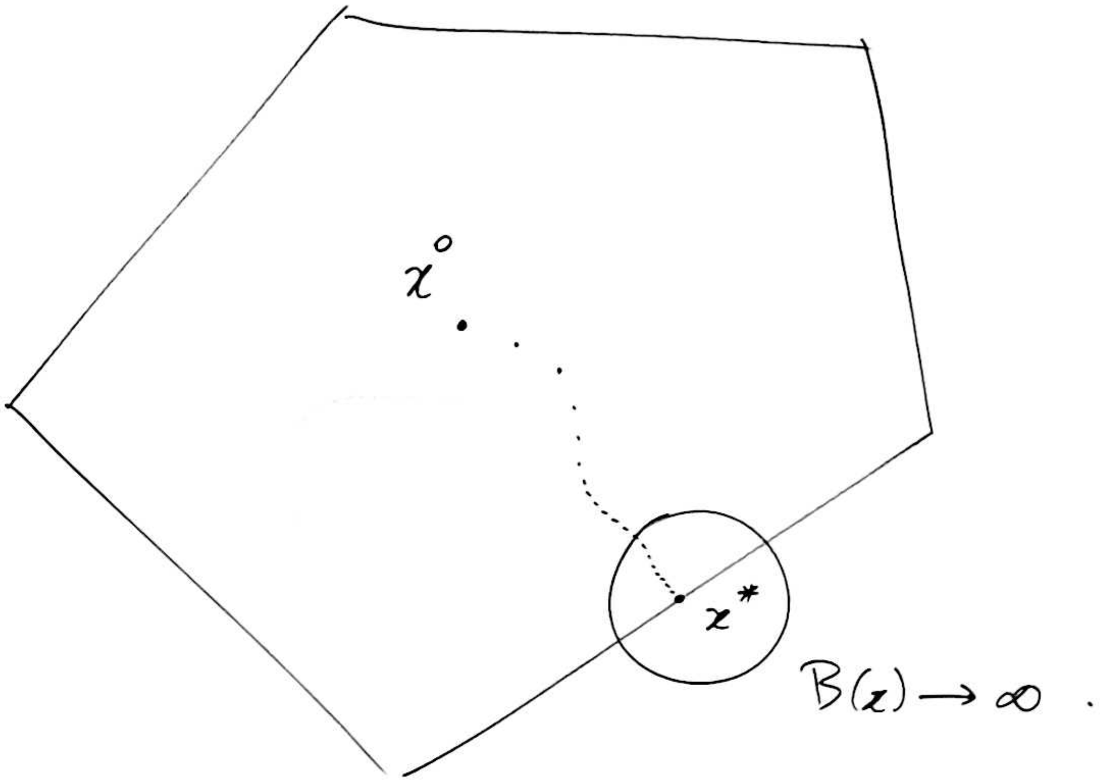
OU SEJA, OBRIGAMOS NO INÍCIO QUE x^0 ESTEJA "NO MEIO" DO CONJUNTO Ω° E AO LONGO DO PROCESSO AFROUXAMOS ESSA EXIGÊNCIA, PERMITINDO QUE x^k SE APROXIME DA FRONTEIRA DE Ω°.

UMA FUNÇÃO $B(x)$ QUE FAZ ESSE TRABALHO É TAL QUE

(i) ESTÁ DEFINIDA EM Ω°.

(ii) $B(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega^\circ$

(iii) SE $\lim_{x \to x^*} g_i(x) = 0$ PARA ALGUM i, ENTÃO $\lim_{x \to x^*} B(x) = \infty$.



B É CHAMADA FUNÇÃO DE BARREIRA.

DUAS FUNÇÕES DE BARREIRA COMUNS:

1) $B(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(x)}$ (BARREIRA INVERSA)

2) $B(x) = -\sum_{i=1}^{m} \log(g_i(x))$. (BARREIRA LOGARÍTMICA)

ESSA É A MAIS USADA. É EMPREGADA EM PACOTES COMPUTACIONAIS COMO IPOPT (INTERIOR POINT OPTIMIZER).

VEJA QUE ESTA $B(x)$ PODE SER NEGATIVA. PORÉM, COMO $x \in D$ (COMPACTO), EXISTE $M > 0$ TAL QUE

$$B(x) + M \geq 0 \quad , \quad \forall x \in \Omega^{\circ}.$$

SUBPROBLEMA: $SP(\mu_k)$: $\min_{x} \; f(x) + \mu_k B(x)$, $\mu_k > 0$.

s.a. $x \in \Omega^{\circ}$.

ESTRATÉGIA DE PENALIZAÇÃO INTERNA:

SEJA DADO $\mu_0 > 0$. FAÇA $k = 0$.

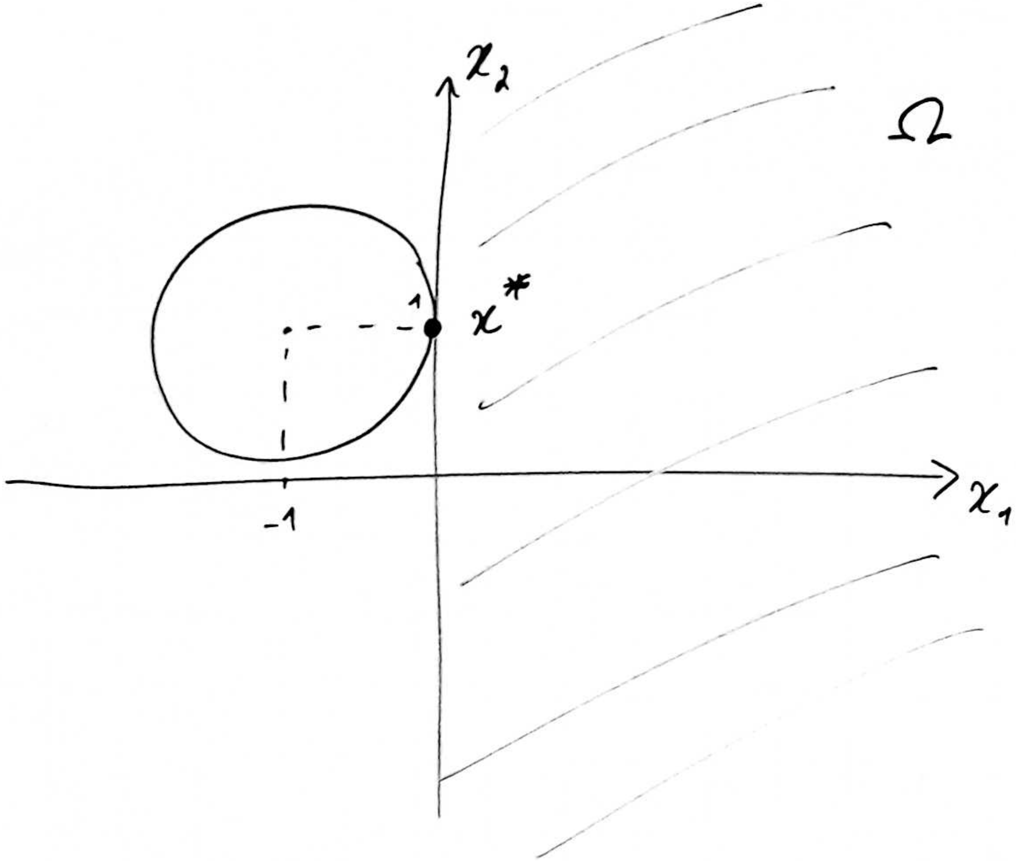
1) CALCULE x^k MINIMIZADOR GLOBAL DE $SP(\mu_k)$.

2) DIMINUA μ_k (OU SEJA, TOME $0 < \mu_{k+1} < \mu_k$), FAÇA $k \leftarrow k+1$ E VOLTE AO PASSO 1.

<u>OBS.:</u> NESSA ESTRATÉGIA, $\lim_{k \to \infty} \mu_k = 0$.

<u>EXEMPLO:</u>

$$P: \quad \min_x f(x_1, x_2) = (x_1+1)^2 + (x_2-1)^2$$
$$\text{s.a. } x_1 \geq 0.$$



$$x^* = (0, 1).$$

SUBPROBLEMA:

$$SP(\mu_k): \min_x \; (x_1+1)^2 + (x_2-1)^2 - \mu_k \ln(x_1)$$

$$\text{s.a.} \quad x_1 > 0 .$$

(μ_k É FIXO)

RESOLVENDO:

$$\begin{bmatrix} 2(x_1^k+1) - p_k \frac{1}{x_1^k} \\ 2(x_2^k - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies x_2^k = 1$$

E $2(x_1^k+1) = \frac{p_k}{x_1^k}$. DAÍ, $2(x_1^k)^2 + 2x_1^k - p_k = 0$.

$\Delta = 4 + 8p_k$

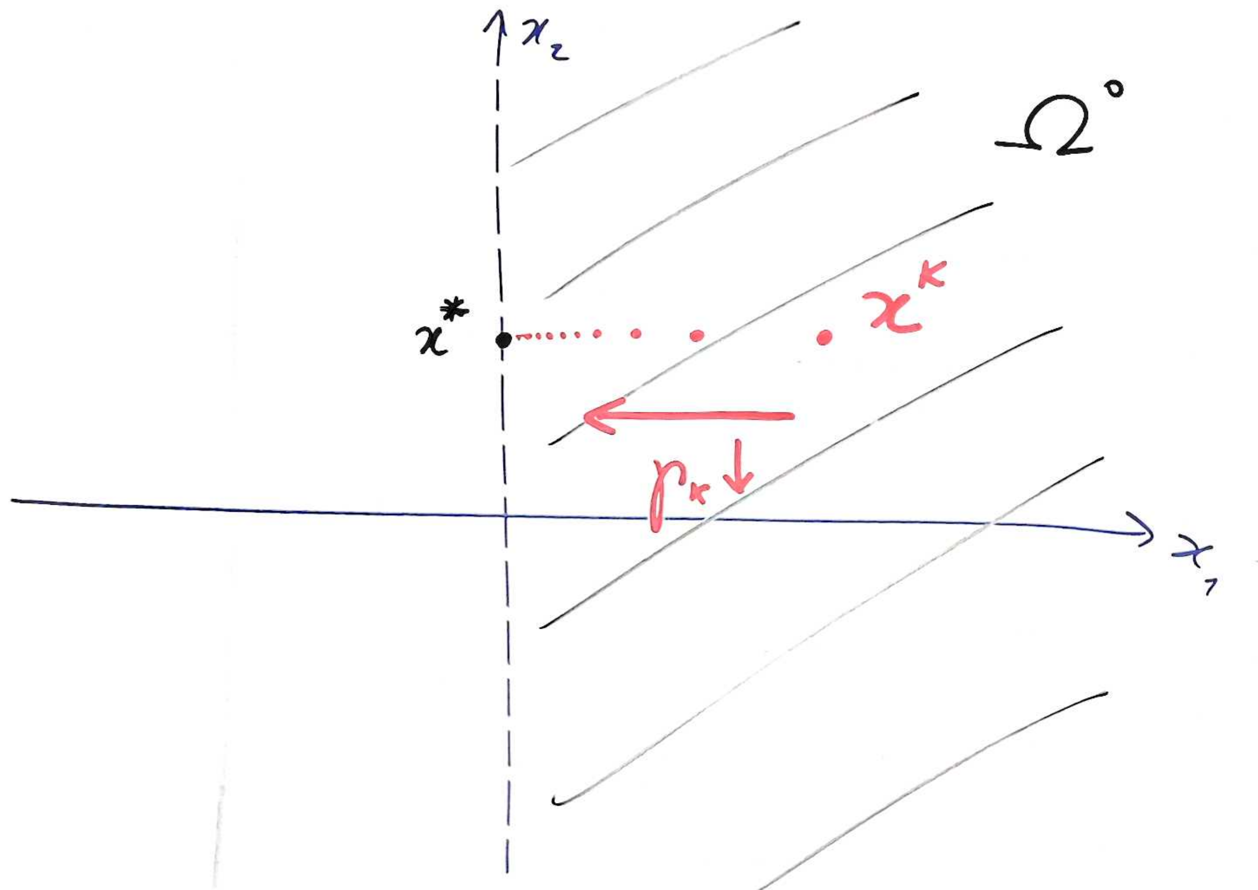
$$\boxed{x_1^k = \frac{-2+\sqrt{4+8p_k}}{4}} > 0$$

$$x_1^k = \frac{-2-\sqrt{4+8p_k}}{4} < 0 \quad \text{(NÃO SERVE)}$$

ASSIM, O PONTO CRÍTICO DO SUBPROBLEMA É $x^k = \left(\frac{-2+\sqrt{4+8p_k}}{4}, 1\right)$.

DADO QUE A F.O. DE $SP(\rho_k)$ É CONVEXA, x^k É MINIMIZADOR GLOBAL DE $SP(\rho_k)$. OBSERVE QUE

$$x_k = \left(\frac{-2+\sqrt{4+8\rho_k}}{4} , 1 \right) \longrightarrow (0,1) = x^* .$$



ASSIM COMO A PENALIZAÇÃO EXTERNA, A INTERNA SOFRE DE INSTABILIDADE NUMÉRICA QUANDO $\mu_k \to 0^+$ (VEJA NO EXEMPLO QUE $\mu_k \to 0^+ \Rightarrow x_1^k \to 0$, E LOGO $\frac{\mu_k}{x_1^k}$ "É INSTÁVEL"). VEJA QUE A HESSIANA DA F.O. DE $SP(\mu_k)$ É

$$\begin{bmatrix} 2 + \frac{\mu_k}{(x_1^k)^2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

SEUS AUTOVALORES SÃO $\lambda_1^k = 2 + \frac{\mu_k}{(x_1^k)^2}$ E $\lambda_2^k = 2$.

COMO $2(x_1^k+1) - \frac{\mu_k}{x_1^k} \longrightarrow 0$ E $x_1^k \to 0^+$

TEMOS $\frac{\mu_k}{x_1^k} \longrightarrow 2$ E LOGO $\frac{\mu^k}{(x_1^k)^2} = \frac{\mu_k}{x_1^k} \cdot \frac{1}{x_1^k} \longrightarrow \infty$.

ASSIM $\lambda_1^k \to \infty$, E A HESSINA FICA CADA VEZ MAIS MAL CONDICIONADA.

CURIOSAMENTE ESTE MAL CONDICIONAMENTO NÃO INTERFERE NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS LINEARES OU QUADRATICOS CONVEXOS (OU SEJA, $f(x) = \frac{1}{2}x^T A x + b^T x$, A SEMI-DEF. POSITIVA); SE O MÉTODO FOR BEM IMPLEMENTADO. ISSO É IMPLEMENTADO EM PACOTES DE PL (CPLEX, GUROBI, KNITRO ETC).

RESULTADOS DE CONVERGÊNCIA

SEJA $\{x^k\}$ UMA SEQUÊNCIA GERADA PELO MÉTODO.

ENTÃO:

1) $f(x^{k+1}) + \mu_{k+1} B(x^{k+1}) \leq f(x^k) + \mu_k B(x^k)$

(F.O. DO SUBPROBLEMA NÃO AUMENTA)

2) $B(x^k) \leq B(x^{k+1})$

(x^{k+1} SE APROXIMA MAIS DA FRONTEIRA)

3) $f(x^{k+1}) \leq f(x^k)$ (F.O. ORIGINAL NÃO AUMENTA)

4) TODO PONTO DE ACUMULAÇÃO x^* É UM MINIMIZADOR GLOBAL DO PROBLEMA ORIGINAL P.