PONTOS INTERIORES NO CASO DE RESTRIÇÕES LINEARES.

$$
P: \quad \min \; f(x) \quad \text{s.a.} \quad Ax = b, \quad x \geq 0
$$

OBS.: JÁ É SABIDO QUE RESTRIÇÕES LINEARES QUAISQUER PODEM SER REESCRITAS NA FORMA $Ax = b$, $x \geq 0$, VIA INSERÇÃO DE FOLGAS.

CASOS PARTICULARES:

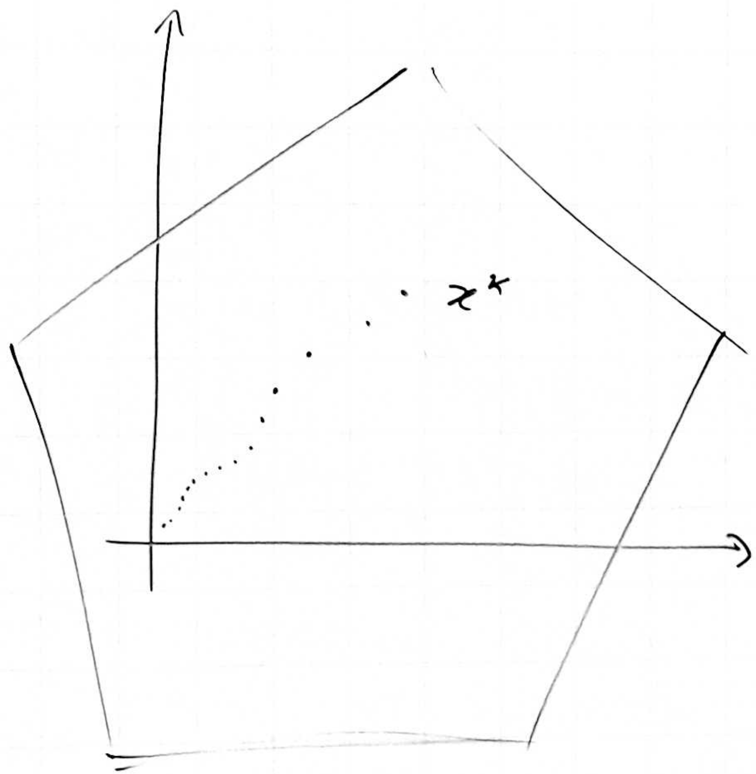
1) PL: $f(x) = c^T x$

2) QP: $f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + b^T x$, Q SIMÉTRICA E DEF. POSITIVA.

O SUBPROBLEMA DE PONTOS INTERIORES É

$$SP(\mu_k) : \min f(x) - \mu_k \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

$$\text{s.a. } Ax = b, \quad (x > 0).$$



NEGLIGENCIAMOS $x > 0$ ENTENDENDO QUE O $\ln$ FAZ ESSE TRABALHO.

KKT DE $SP(\mu_k)$ É

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} \nabla f(x) - \mu_k \begin{bmatrix} 1/x_1 \\ \vdots \\ 1/x_n \end{bmatrix} + A^T y \\ \\ Ax - b \end{bmatrix} = 0$$

APLICAMOS O MÉTODO DE NEWTON AO SISTEMA

$$F(x,y) = 0:$$

$$\boxed{F'(x,y)\, d = -F(x,y).}$$

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 f(x) + \mu_k \begin{bmatrix} 1/x_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/x_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/x_n^2 \end{bmatrix} & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x) - \mu_k \begin{bmatrix} 1/x_1 \\ \vdots \\ 1/x_n \end{bmatrix} + A^T y \\ Ax - b \end{bmatrix}$$

CHAMANDO

$$X = \text{diag}(x_1, \ldots, x_m) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_m \end{bmatrix},$$

TEMOS

$$X^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_m}\right) = \begin{bmatrix} 1/x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{x_m} \end{bmatrix}$$

DAÍ, A MATRIZ DO SISTEMA DE NEWTON FICA

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 f(x) + \mu_k X^{-2} & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

OBSERVE À MEDIDA QUE $x_i \to 0^+$, ESSA MATRIZ FICA MAL CONDICIONADA (A ENTRADA $X_{ii}^{-2} = \frac{1}{x_i^2} \to \infty$).

O SEGREDO PARA EVITAR ESSE PROBLEMA É CONTROLAR PRODUTOS $\mu_k \frac{1}{(x_i^k)^2}$.

DEFINIMOS $z_i = \frac{\mu}{x_i}$, $\forall i = 1, \ldots, m$. DESTA FORMA, REESCREVEMOS O SISTEMA KKT DO SUBPROBLEMA COMO

$$\tilde{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} \nabla f(x) - z + A^T y \\ Ax - b \\ x_1 z_1 - \mu \\ \vdots \\ x_n z_n - \mu \end{bmatrix} = 0$$

APLICAMOS NEWTON À $\tilde{F}(x,y,z) = 0$:

$$
\begin{bmatrix}
\nabla^2 f(x) & A^T & -I \\
A & 0 & 0 \\
\begin{bmatrix} z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & z_n \end{bmatrix} & 0 & \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} = -\tilde{F}(x, y, z)
$$

VEJA QUE ESTA MATRIZ É BEM CONDICIONADA POIS ELA NÃO ENVOLVE FRAÇÕES COMO A ANTERIOR.

NA MATRIZ DE NEWTON ANTERIOR, O CONTROLE DAS FRAÇÕES $\mu \cdot \frac{1}{x_i^2}$ É FEITO SOMENTE COM x_i. <u>PROBLEMA</u>: μ É FIXO E x_i FAZ PARTE DA SOLUÇÃO DO SUBPROBLEMA. PORTANTO NOSSO CONTROLE DESSA FRAÇÃO É LIMITADO.

NA MATRIZ ANTERIOR, O CONTROLE É FEITO VIA VARIÁVEL AUXILIAR z_i. <u>AQUI</u>, O CONTROLE É FEITO COM x_i E z_i, E TEMOS MAIS LIBERDADE!

EXEMPLO: SUPONHA QUE $\mu = \mu_K = 10^{-3}$.

1° SISTEMA NEWTONIANO: AFIM DE $\frac{\mu}{x_i^2}$ FICAR "CONTROLADO"

x_i DEVERIA SER MUITO "GRANDE": $x_i = 10^{-2} \Rightarrow$

$\frac{\mu}{x_i^2} = \frac{10^{-3}}{10^{-4}} = 10$. SE $x_i = 10^{-3}$ ENTÃO $\frac{\mu}{x_i^2} = \frac{10^{-3}}{10^{-6}} = 10^3$.

ALÉM DISSO, LEMBRE QUE NÃO TEMOS LIBERDADE PARA ESCOLHER x_i: ELE VEM DA SOLUÇÃO DO SUBPROB.

2° SISTEMA NEWTONIANO: AFIM DE $x_i z_i - \mu \approx 0 \; (=0)$,

PODEMOS TER

(i) $x_i = 10^{-300}$, $z_i = 10^{297}$ (PRODUTO DESBALANCEADO)

(ii) $x_i = z_i = \sqrt{\mu} = 10^{-3/2}$ (" BALANCEADO)

(iii) $x_i = 10^{-3}$, $z_i = 1$ (" ")

A RESOLUÇÃO DO ÚLTIMO SISTEMA NEWTONIANO DEVE BUSCAR UM PRODUTO BALANCEADO.

ISSO EVITA O MAL CONDICIONAMENTO DA MATRIZ

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 f(x) & A^T & -I \\ A & 0 & 0 \\ Z & 0 & X \end{bmatrix}.$$

OBS.: A VELOCIDADE COM QUE SE DIMINUI μ_k TEM REFLEXOS NO BALANCEAMENTO.

ESSA IDEIA ESTÁ IMPLEMENTADA EM PACOTES COMO CPLEX, GUROBI, KNITRO ETC.