DUALIDADE EM PNL

P: $\min f(x)$

s.a. $x \in S = \{x \in \Omega ;\ h(x) = 0,\ g(x) \leq 0\}$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.

LAGRANGEANA:

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j g_j(x).$$

LEMA:

$$\sup_{\substack{\lambda \in \mathbb{R}^m \\ \mu \geq 0}} L(x,\lambda,\mu) = \begin{cases} f(x) & \text{SE } x \in S \\ \infty & \text{SE } x \in \Omega \setminus S. \end{cases}$$

PROVA: SE $x \in S$ ENTÃO

$$L(x,\lambda,\mu) = f(x) + \underbrace{\sum_i \lambda_i h(x)}_{0} + \underbrace{\sum_j \mu_j g_j(x)}_{\leq 0} \leq f(x).$$

ALÉM DISSO, $x \in S \Rightarrow L(x,\lambda,0) = f(x)$. OU SEJA, $\sup\limits_{\dots} L(x,\lambda,\mu) = f(x)$ CASO $x \in S$.

SEJA AGORA $x \in \Omega \setminus S$. SE $h_j(x) \neq 0$, ENTÃO PARA

λ DEFINIDO POR

$$\lambda_i = \begin{cases} t\, h_i(x) & \text{SE } i=j \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

ASSIM,

$$L(x,\lambda,0) = f(x) + t\,(h_j(x))^2 \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty .$$

SE $g_j(x) > 0$ ENTÃO DEFININDO

$$\mu_i = \begin{cases} t & \text{SE } i=j \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

TEMOS

$$L(x,0,\mu) = f(x) + t\, g_j(x) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty .$$ DAÍ,

$\sup\limits_{\dots} L(x,\lambda,\mu) = \infty$ CASO $x \in \Omega \setminus S$. $\blacksquare$

ESTE LEMA NOS PERMITE ESCREVER

$$P: \min \sup_{\substack{\lambda \in \mathbb{R}^m \\ \mu \geq 0}} L(x, \lambda, \mu)$$

$$\text{s.a.} \quad x \in S.$$

O <u>DUAL</u> É DEFINIDO TROCANDO "MIN" POR "MAX":

$$D: \max \inf_{x \in \Omega} L(x, \lambda, \mu)$$

$$\text{s.a.} \quad (\lambda, \mu) \in \Delta,$$

ONDE $\Delta = \{ (\lambda, \mu) ; \inf_{x \in \Omega} L(x, \lambda, \mu) > -\infty , \mu \geq 0 \}$

P É CHAMADO PRIMAL.

A FUNÇÃO DUAL É

$$\varphi(\lambda,\mu) = \inf_{x\in\Omega} L(x,\lambda,\mu).$$

EXEMPLOS:

1) (PROGRAMAÇÃO LINEAR)

$$P: \quad \min\ c^t x \qquad\qquad \text{(PRIMAL)}$$
$$\text{s.a. } Ax \geq b, \quad A\ p\times m.$$

FUNÇÃO DUAL:

$$\varphi(\mu) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{ c^t x + \mu^t (b - Ax) \}$$

$$= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{ (c^t - \mu^t A) x + \mu^t b \}$$

TEMOS $\varphi(\mu) > -\infty$ QUANDO $c^t - \mu^t A = 0$, OU SEJA, $A^t \mu = c$. NESTE CASO, $\varphi(\mu) = b^t \mu$. DAÍ,

$$D: \quad \begin{array}{ll} \max & b^t \mu \\ \text{s.a.} & A^t \mu = c \\ & \mu \geq 0 \end{array} \qquad \text{(DUAL)}.$$

//

2) (PROG. QUADRÁTICA)

$$P: \min \tfrac{1}{2} x^t Q x + c^t x \qquad \text{(PRIMAL)}$$
$$\text{s.a.} \quad Ax \leq b .$$

Q SIMÉTRICA E DEFINIDA POSITIVA.

FUNÇÃO DUAL:

$$\varphi(\mu) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \tfrac{1}{2} x^t Q x + c^t x + \mu^t (Ax - b) \right\}$$

ESTE ÍNFIMO É ATINGIDO NO PONTO ESTACIONÁRIO DE L, DADO QUE L É UMA QUADRÁTICA ESTRITAMENTE CONVEXA:

$$Qx + c + A^t \mu = 0 \implies x = -Q^{-1}(A^t \mu + c).$$

ASSIM,

$$\varphi(\mu) = \frac{1}{2}\left(A^t\mu + c\right)^t \overbrace{Q^{-1}Q}^{I}\, Q^{-1}\left(A^t\mu + c\right) - c^t Q^{-1}\left(A^t\mu + c\right)$$

$$- \mu^t\left(AQ^{-1}\left(A^t\mu + c\right) + b\right)$$

$$= \frac{1}{2}\mu^t A Q^{-1} A^t \mu + \cancel{\mu^t A Q^{-1} c} + \frac{1}{2} c^t Q^{-1} c$$

$$- c^t Q^{-1} A^t \mu - c^t Q^{-1} c - \mu^t A Q^{-1} A^t \mu - \cancel{\mu^t A Q^{-1} c}$$

$$- \mu^t b$$

$$\Longrightarrow \varphi(\mu) = -\frac{1}{2}\mu^t\left(AQ^{-1}A^t\right)\mu - \left(AQ^{-1}c + b^t\right)\mu - \frac{1}{2}c^t Q^{-1} c.$$

$(-\varphi$ É QUADRÁTICA$)$

O DUAL É

$$\mathcal{D}: \quad \max \; -\frac{1}{2}\mu^t (AQ^{-1}A^t)\mu - (AQ^{-1}c + b^t)\mu - \frac{1}{2}c^t Q^{-1} c \,.$$

$$\text{s.a.} \quad \mu \geq 0$$

$\mathcal{D}$ É INTERESSANTE EM RELAÇÃO À $\mathcal{P}$ SE:

(i) HÁ MUITAS VARIÁVEIS x_i EM RELAÇÃO AO NÚMERO DE RESTRIÇÕES EM $Ax \leq b$ (μ TEM ESTA DIMENSÃO).

(ii) SEJA RELATIVAMENTE FÁCIL CALCULAR Q^{-1}.

TEOREMA: PARA QUALQUER PROBLEMA PRIMAL P (CONVEXO OU NÃO), O CONJUNTO VIÁVEL Δ DO PROBLEMA DUAL É CONVEXO E A FUNÇÃO DUAL $\varphi(\lambda,\mu)$ É CÔNCAVA (ISTO É, $-\varphi(\lambda,\mu)$ É CONVEXA).

PROVA: LEMBRAMOS QUE

$$\Delta = \{ (\lambda,\mu) \; ; \; \varphi(\lambda,\mu) > -\infty \}.$$

SEJAM $(\lambda,\mu), (\tilde{\lambda},\tilde{\mu}) \in \Delta$ E $t \in [0,1]$. TEMOS

$$L(x, t\lambda + (1-t)\tilde{\lambda}, t\mu + (1-t)\tilde{\mu}) = tL(x,\lambda,\mu) + (1-t)L(x,\tilde{\lambda},\tilde{\mu})$$

POIS L É LINEAR EM λ, μ.

DAÍ,

$$\varphi(t\lambda + (1-t)\tilde{\lambda}, t\mu + (1-t)\hat{\mu}) = \inf_{x\in\Omega} L(x, t\lambda + (1-t)\tilde{\lambda}, t\mu + (1-t)\hat{\mu})$$

$$= \inf_{x\in\Omega} \{ t L(x,\lambda,\mu) + (1-t) L(x,\hat{\lambda},\hat{\mu}) \}$$

$$\geq t \inf_{x\in\Omega} L(x,\lambda,\mu) + (1-t)\inf_{x\in\Omega} L(x,\tilde{\lambda},\hat{\mu})$$

$$= t\,\varphi(\lambda,\mu) + (1-t)\,\varphi(\hat{\lambda},\hat{\mu}).$$

ISTO MOSTRA QUE:

- $\varphi(t\lambda + (1-t)\tilde{\lambda}, t\mu + (1-t)\hat{\mu}) > -\infty \Rightarrow t(\lambda,\mu) + (1-t)(\hat{\lambda},\hat{\mu}) \in \Delta$
  $\Rightarrow \Delta$ É CONVEXO.
- φ É CÔNCAVA SOBRE Δ.

$\blacksquare$

ISSO É BOM POIS O DUAL PODE SER ESCRITO COMO MINIMIZAÇÃO DE UMA FUNÇÃO CONVEXA:

$$D: \; -\min \; -\varphi(\lambda, \mu)$$
$$\text{s.a.} \; (\lambda, \mu) \in \Delta$$

SABEMOS QUE KKT É SUFICIENTE PARA ENCONTRAR A SOLUÇÃO GLOBAL!

EM QUE O DUAL PODE AJUDAR NA RESOLUÇÃO DO PRIMAL?

* O PROBLEMA DUAL SEMPRE FORNECE LIMITANTES INFERIORES PARA O VALOR ÓTIMO DO PRIMAL (DUALIDADE FRACA).

TEOREMA (DA DUALIDADE FRACA). PARA CADA PAR P, D, TEMOS

$$\varphi(\lambda, \mu) \leq f(x),$$

PARA TODOS PONTOS PRIMAL-DUAL VIÁVEIS ($(\lambda, \mu) \in \Delta$ E $x \in S$). EM PARTICULAR,

$$\varphi^* = \sup_{(\lambda,\mu) \in \Delta} \varphi(\lambda, \mu) \leq \inf_{x \in S} f(x) = f^*.$$

PROVA: PARA $x \in S$ E $(\lambda, \mu) \in \Delta$ TEMOS

$$\varphi(\lambda, \mu) = \inf_{x \in \Omega} L(x, \lambda, \mu) \leq L(x, \lambda, \mu)$$

$$= f(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x)}_{0} + \underbrace{\sum_{j=1}^{p} \mu_j g_j(x)}_{\leq 0}$$

$$\leq f(x) .$$

QUANDO $\varphi^* < f^*$, DIZEMOS QUE HÁ BRECHA DE DUALIDADE.