

# DUALIDADE EM PNL (CONTINUAÇÃO)

ALTA PASSADA:

$$P: \min_x f(x) \\ \text{s.a. } x \in S$$

$$S = \{x \in \Omega; h(x) = 0, g(x) \leq 0\} \\ \text{(PRIMAL)}$$

$$D: \max_{\lambda, \mu} \varphi(\lambda, \mu) \\ \text{s.a. } (\lambda, \mu) \in \Delta$$

$$\Delta = \{(\lambda, \mu); \varphi(\lambda, \mu) > -\infty, \\ \mu \geq 0\}$$

$$\varphi(\lambda, \mu) = \inf_{x \in \Omega} L(x, \lambda, \mu)$$

DUALIDADE FRACA: SE  $x \in S$  E  $(\lambda, \mu) \in \Delta$  ENTÃO  $\varphi(\lambda, \mu) \leq f(x)$ .  
EM PARTICULAR  $\varphi^* \leq f^*$ .

HÁ BRECHA DE DUALIDADE QUANDO  $\varphi^* < f^*$ .

COROLÁRIO: SEJAM  $P, D$  UM PAR DE PROBLEMAS PRIMAL - DUAL. ENTÃO

(i)  $P$  É ILIMITADO  $\Rightarrow D$  É INVIAVEL.

(ii)  $D$  É ILIMITADO  $\Rightarrow P$  É INVIAVEL.

(iii) SE NÃO HÁ BRECHA DE DUALIDADE

$(\varphi^* = f^*)$  ENTÃO, DADOS  $x^* \in S$  E  $(\lambda^*, \mu^*) \in \Delta$

COM  $\varphi(\lambda^*, \mu^*) = f(x^*)$ , OS PONTOS  $x^*$  E

$(\lambda^*, \mu^*)$  SÃO ÓTIMOS PRIMAL E DUAL, RESPECTIVAMENTE.

EXEMPLOS:

1)  $P: \min \frac{1}{x}$  s.a.  $-x \leq 0$ ,  $x \in \Omega = (0, \infty]$ .

TEMOS  $f^* = 0$ , MAS  $P$  NÃO TEM MINIMIZADOR.

FUNÇÃO DUAL:

$$\varphi(\mu) = \inf_{x \in (0, \infty]} L(x, \mu) = \inf_{x > 0} \left\{ \frac{1}{x} + \mu(-x) \right\}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se } \mu = 0 \\ -\infty, & \text{se } \mu > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta = \{ \mu; \varphi(\mu) > -\infty \} = \{0\}.$$

ASSIM,  $D: \max \varphi(\mu)$  TEM SOLUÇÃO  $\mu^* = 0$ . VÊJA QUE  $f^* = \varphi^* = 0$   
s.a.  $\mu = 0$  MAS  $P$  NÃO TEM SOLUÇÃO.

$$2) \mathcal{P}: \min x \text{ s.a. } x^2 \leq 0, \Omega = \mathbb{R}.$$

$x^* = 0$  é o único minimizador de  $\mathcal{P}$ , e  $f^* = 0$ .

FUNÇÃO DUAL:

$$\varphi(\mu) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \mathcal{L}(x, \mu) = \inf_x \{ x + \mu x^2 \}$$

TEMOS  $\varphi(\mu) > -\infty \iff \mu > 0$  . OU SEJA,  $\Delta = (0, \infty]$ .

PARA  $\mu > 0$ ,  $\varphi(\mu) = -\frac{1}{2\mu}$  . 2060

$$\mathcal{D}: \max -\frac{1}{2\mu} \\ \text{s.a. } \mu > 0$$

VEJA QUE, APESAR DE  $\varphi^* = f^* = 0$ ,  $\mathcal{D}$  NÃO POSSUI  
MAXIMIZADOR. //

CONVEXIDADE + DUALIDADE  $\longrightarrow$  NÃO HÁ BRECHA DE DUALIDADE.

TEOREMA: SEJA  $\Omega = \mathbb{R}^m$ , E SUPONHA QUE  $P$  SEJA CONVECO  
(i.é.,  $f, g$  CONVEXAS E  $h$  LINEAR).

SE  $x^*$  É PONTO KKT DE  $P$  COM MULTIPLICADO  
RES  $(\lambda^*, \mu^*)$  ENTÃO  $(\lambda^*, \mu^*)$  É MAXIMIZADOR  
DO PROBLEMA DUAL  $D$ . NESTE CASO

$$\varphi^* = \varphi(\lambda^*, \mu^*) = f(x^*) = f^*$$

(OU SEJA, OS MAXIMIZADORES DUAIS FORNECEM CANDIDATOS À  
MINIMIZADORES PRIMAS).

PROVA: como  $\mathcal{P}$  é um PROBLEMA CONVEXO, A LAGRANGE

ANA

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j g_j(x)$$

é CONVEXA EM  $x$ . ASSIM, SE  $x^*$  é KKT DE  $\mathcal{P}$  ENTÃO

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(\lambda^*, \mu^*) = \inf_{x \in \mathbb{R}^m} L(x, \lambda^*, \mu^*) = L(x^*, \lambda^*, \mu^*)$$

(KKT é SUFICIENTE PARA MINIMIZAÇÃO DE  $L$ ). ASSIM,

$$\varphi(\lambda^*, \mu^*) = L(x^*, \lambda^*, \mu^*) \stackrel{x^* \text{ KKT}}{=} f(x^*) \Rightarrow (\lambda^*, \mu^*) \text{ é MAXIM. DUAL} \quad \blacksquare$$

## EXEMPLOS:

$$1) \quad \mathcal{P}: \min \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\text{s.a. } x_1 + 1 \leq 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega = \mathbb{R}^2.$$

( $\mathcal{P}$  é convexo).

$$p(\mu) = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} \left\{ \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \mu(x_1 + 1) \right\} > -\infty, \quad \forall \mu \geq 0.$$

RESOLVENDO "inf":

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} x_1 = -\mu \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

DAÍ,  $p(\mu) = \frac{1}{2}\mu^2 + \mu(-\mu + 1) = -\frac{1}{2}\mu^2 + \mu$ . logo,

$$\mathcal{D}: \max -\frac{1}{2}\mu^2 + \mu \quad \text{s.a. } \mu \geq 0, \quad \text{PVSA SOLUÇÃO É } \mu^* = 1.$$

O PONTO PRIMAL CUJO MULTIPLICADOR ASSOCIADO É  $\mu^*$ ,  
É  $x^* = (-1, 0)$ , QUE É A SOLUÇÃO PRIMAL.

NOTE QUE

$$p^* = p(1) = \frac{1}{2} = f(-1, 0) = f^* .$$

2) P:  $\min x_1 - x_2$

s.a.  $x_1 + x_2 - 1 \leq 0$ ,

$$x \in \Omega = \mathbb{R}_+^2 .$$

DUAL:

$$p(\mu) = \inf_{x \geq 0} \left\{ x_1 - x_2 + \mu(x_1 + x_2 - 1) \right\}$$

$$= \inf_{x \geq 0} \left\{ (\mu+1)x_1 + (\mu-1)x_2 - \mu \right\}$$

$$\varphi(\mu) > -\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \mu+1 \geq 0 \\ \mu-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \mu \geq 1.$$

MAIS AINDA, PARA  $\mu \geq 1$ ,  $\varphi(\mu) = -\mu$ .

ENTÃO

$$D: \max -\mu$$

s.a.  $\mu \geq 1$

CUJA SOLUÇÃO É  $\mu^* = 1$ .

VEJA QUE

$$\varphi^*(1) = -1 = L((0,0), 1) = f^*.$$

O CANDIDATO  $\bar{x} = (0,0)$  NÃO É SOLUÇÃO DE  $P$ , POIS NÃO É KKT.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ISSO É SATISFEITO PARA  $\mu_2 = 2$  E  $\mu_3 = 0$ .

PORÉM, A COMPLEMENTARIDADE PARA A RESTRIÇÃO

$x_1 + x_2 - 1 \leq 0$  FALHA ( $\mu^* (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - 1) = -1 \neq 0$ ).

AGORA, TAMBÉM TEMOS

$$\varphi^*(1) = -1 = \mathcal{L}((0, 1), 1) = f^*$$

(LEMBRE QUE  $\varphi(1) = \inf_{x \geq 0} \{ (1+1)x_1 + (1-1)x_2 - 1 \}$ )

OU SEJA,  $x^* = (0, 1)$  É OUTRO CANDIDATO À SOLUÇÃO PRIMAL.  
(ESTA É A SOLUÇÃO PRIMAL !!!). O QUE OCORRE AQUI É QUE EXISTEM

VÁRIOS CANDIDATOS À SOLUÇÃO PRIMAL ASSOCIADOS À SOLUÇÃO  
DUAL  $\mu^*$ .

---

OBS.: QUANDO SÓ HÁ UM CANDIDATO  $x^*$  ASSOCIADO À  $(\lambda^*, \mu^*)$   
ENTÃO  $x^*$  É SOLUÇÃO PRIMAL.

---

3) (PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA)

$$P: \min \frac{1}{2} x^t Q x + c^t x$$

$$\text{s.o. } Ax \leq b$$

$Q$  - SIMÉTRICA E DEF. POSITIVA.

VIMOS QUE O DUAL (ALLA PASSADA) É

$$D: \max -\frac{1}{2} \mu^t (AQ^{-1}A^t) \mu - (AQ^{-1} + b^t) \mu - \frac{1}{2} c^t Q^{-1} c$$

$$\text{s.a. } \mu \geq 0.$$

(DEMOS RAZÕES PARA JUSTIFICAR O USO DE D AO INVÉS DE P).

DADA A ÚNICA SOLUÇÃO  $\mu^*$  DE D (A F.O. DE D É ESTRITAMENTE CÔNCAVA), EXISTIRÁ APENAS UM CANDIDATO  $x^*$  À SOLUÇÃO PRIMAL, QUE SERÁ A SOLUÇÃO PRIMAL. É POSSÍVEL MOSTRAR QUE

$$x^* = -Q^{-1}(c + A^t \mu^*)$$

EXERCÍCIO: FAÇA ISTO VERIFICANDO QUE  $x^*$  É KKT DE P.