Otimização I: problemas irrestritos / métodos

- gradiente: $x^{k+1} = x^k - \underbrace{t_k}_{\text{passo}} \nabla f(x^k)$

- Newton: $x^{k+1} = x^k - (\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k)$
  (caro computacionalmente)

- Quase-Newton: $x^{k+1} = x^k - B_k \nabla f(x^k)$
  (B_k é barata)

- gradiente espectral (?)

- gradientes conjugados
  (minimização de quadráticas)

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x,$$

A simétrica e definida positiva

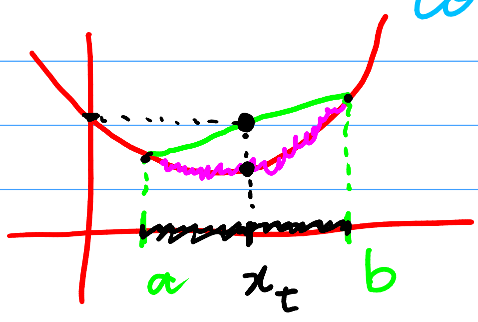
$\Rightarrow$ $d^T A d > 0, \ \forall d \neq 0.$

A simétrica e def. positiva $\Rightarrow$ f (estritamente) convexa.

Funções convexas:

$$f(x_t) \leq t f(a) + (1-t) f(b)$$

$$t \in [0,1]$$



Funções convexas (definição)

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é <u>convexa</u> se

$$f(ta+(1-t)b) \leq t f(a) + (1-t) f(b),$$

$\forall a,b \in \mathbb{R}^n$ e $\forall t \in [0,1]$.

f é <u>estritamente convexa</u> se a desigualdade é $<$.

<u>TEO:</u> f convexa. $\nabla f(x^*) = 0 \implies x^*$ é minimizador de f.

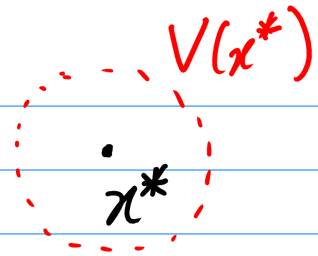
O que é resolver $\min_x f(x)$?

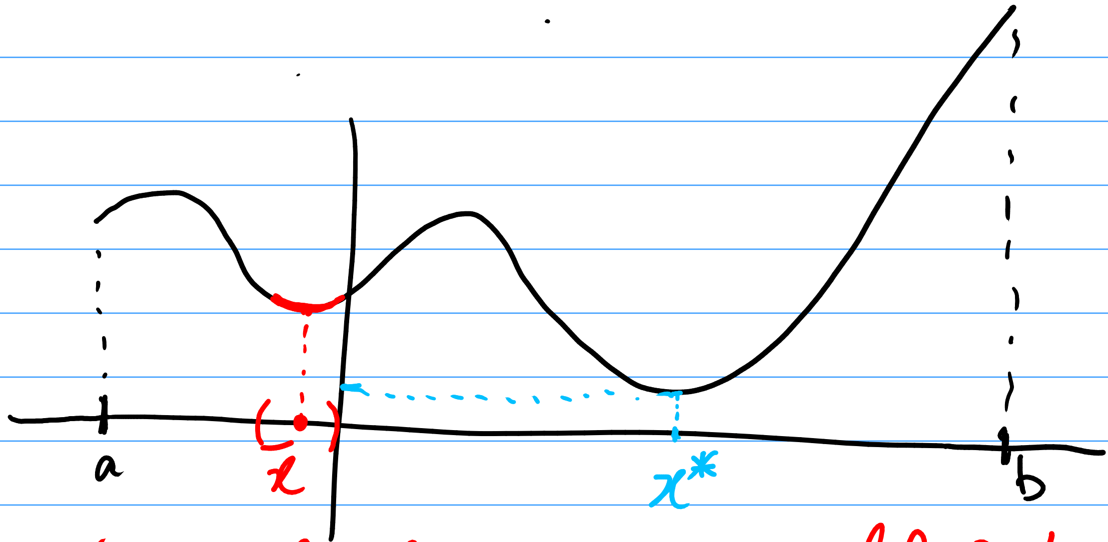
1) <u>Ideal:</u> encontrar um minimizador (global), isto é, x^* tal que

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x$$

---

2) minimizador local: $\exists\, V(x^*)$ vizinhança de x^* tal que $f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x \in V(x^*)$





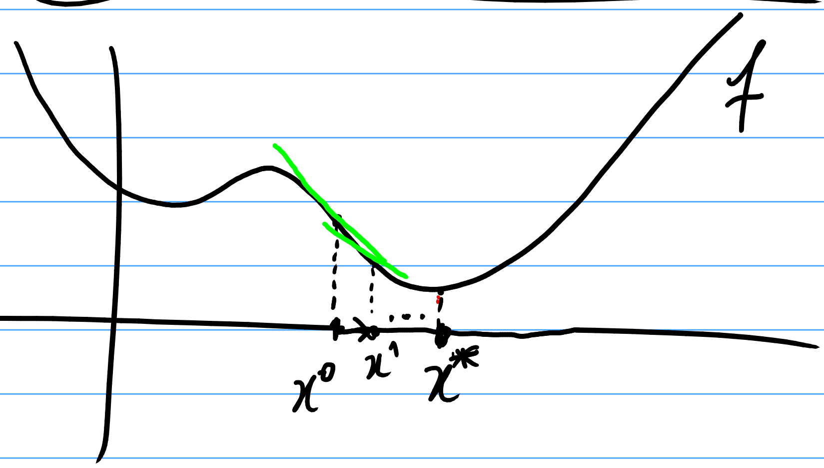
$\bar{x}$ é mín. local, mas não global!

x^* é mín. global

$\{x^k\}$ sequência gerada pelo método

$$\lim_{k\to\infty} x^k = x^*$$

$$\|\nabla f(x^k)\| \leq \varepsilon$$



3) Expectativa na prática: sistema ñ lineares

encontrar x^* tal que $\nabla f(x^*) = 0$

condição (necessária) de otimalidade de 1ª ordem

Problemas restritos

$$\min_x \ f(x)$$

sujeito a $h(x) = 0$) m restrições

$g(x) \leq 0$) p restrições

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

$\nabla f(x^*) = 0$ (não serve mais, pois não considera as restrições!)

KKT (Karush-Kuhn-Tucker)