Estratégia de penalização externa

Objetivos:

1) apresentar a estratégia base para o método (prático) de Lagrangiano aumentado (ALGENCAN).

2) Provar o teorema
"x^* minimizador local e regular $\Rightarrow$ x^* é KKT"
(condição necessária de otimalidade)

Referência:

[Martínez, J. M. Otimização prática usando o Lagrangiano aumentado]

Ideia penalização externa

$P:$ $\min f(x)$ s.a. $h(x)=0$, $g(x)\leq 0$.
$x\in D$

$D\subset\mathbb{R}^n$ é conjunto compacto.

Hipótese: P é viável, i.é., admite pontos viáveis.

Teorema (de Weierstrass): D compacto
$\Downarrow$
P tem min. global.

(Lembrando que estamos supondo que ∇f, ∇h, ∇g são contínuos).

$\rightarrow$ Resolver P, resolvendo uma sequência de problemas "fáceis".

• Restrições $h(x)=0$ e $g(x)\leq 0$ (difíceis)

$$\phi(x) = \|h(x)\|^2 + \|\max\{0, g(x)\}\|^2$$

↳ medida de inviabilidade

<u>Exemplo:</u> $h(x) = x_1 + x_2^2 = 0$, $g(x) = 2x_1 + x_2 \leq 0$.

$$\phi(x) = |x_1 + x_2^2|^2 + |\max\{0, 2x_1 + x_2\}|^2$$

• $\tilde{x} = (-1, 1)$:

$$\phi(\tilde{x}) = |-1+1^2|^2 + |\max\{0, -2+1\}|^2 = 0.$$

$\tilde{x}$ é viável.

• $\hat{x} = (1, 0)$:

$$\phi(\hat{x}) = |1+0^2|^2 + |\max\{0, 2+0\}|^2 = 1^2 + 2^2 = 5. \quad > 0$$

$\hat{x}$ <u>não</u> é viável.

$\bar{x} = (-0{,}99 ; 1) \Rightarrow \phi(\bar{x}) = 10^{-4} > 0$.

$\bar{x}$ <u>não</u> é viável, mas não é tão inviável que $\hat{x}$ ...

• ϕ mede o quão inviável o ponto é.

• $\phi(x) = 0 \iff x$ é viável.

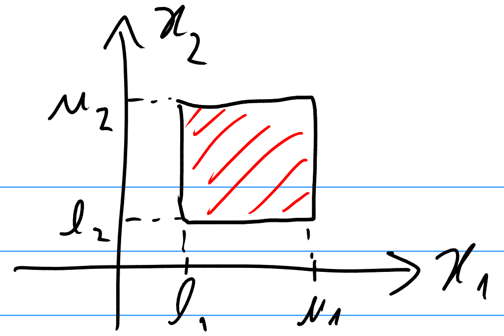
Problema fácil:

$$SP(\rho): \min_x f(x) + \frac{\rho}{2}\phi(x),$$
$$\text{s.a. } x \in D.$$

onde $\rho > 0$.

- ρ cresce $\Longrightarrow$ $\phi(x)$ tem mais importância na minimização.
  $\Rightarrow$ $\phi(x)$ decresce
  $\Rightarrow$ x é menos inviável ✓
- Ao mesmo tempo f é minimizada... ✓
- $SP(\rho)$ é "mais fácil" que P pois não lida com as restrições difíceis diretamente, e D é geralmente fácil de lidar.

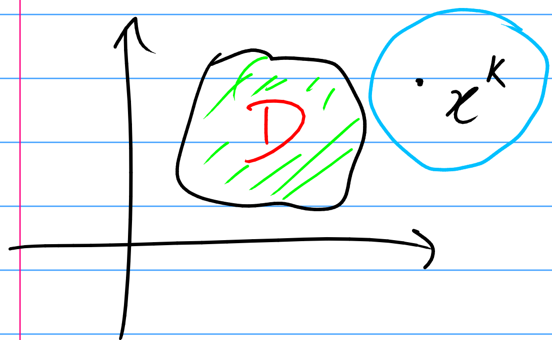
Por ex.: $D = \{x \in \mathbb{R}^n ; \, l_i \leq x_i \leq u_i, \, \forall i\}$
(caixa)



(ALGENCAN lida com caixas).

- O processo de transferir as restrições difíceis $h(x)=0$ e $g(x)\le 0$ para a F.O. do subproblema é chamado "penalização".

- "Penalização externa" vem do fato da solução x^k de $SP(\rho_k)$ estar por fora das restrições $h(x)=0$ e $g(x)\le 0$.



$\phi(x^k)>0$

$\phi(x)>0 \iff$ "fora de D"

$D=\{x\in\mathbb{R}^n ; h(x)=0, g(x)\le 0\}$

Método de penalização externa

$\rho_0 > 0, \quad k \leftarrow 0$

Resolva

$$SP(\rho_k): \min_x f(x) + \frac{\rho_k}{2}\left[\|h(x)\|^2 \;\; \|\max\{0, g(x)\}\|^2\right]$$

$$\text{s.a. } x \in D$$

globalmente, obtendo x^k.

$\rho_{k+1} = 10\rho_k$

$k \leftarrow k+1$

Obs: 1) $\rho_k \to \infty$. O método "não para", quando uma sequência $\{x^k\}$.

2) Esse método não é prático pois ρ_k cresce muito e x^k deve ser minimizador global.

3) Tem ótimas propriedades teóricas!

4) A idéia de penalização externa é usada em outros métodos, p. ex., lagrangiano aumentado.