# Geração de colunas



PL: $\min\limits_{x} \; c^t x$

$$\text{s.a.} \quad Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Escrevemos

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (m_1 \times n) \\ (m_2 \times n) \end{matrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Assim

PL: $\min\limits_{x} c^t x \;$ s.a. $\; A_1 x = b_1 \,,\; A_2 x = b_2 \,,\; x \geq 0$

Seja $X = \{x \,;\, A_2 x = b_2 \,,\, x \geq 0\}$. Suponha $X \neq \emptyset$ e tome

- $x_1, \ldots, x_K$ pontos extremos de $X$;
- $d_1, \ldots, d_\ell$ direções extremas normalizadas de $X$.

O teorema de representação de poliedros permite escrever

$$X = \left\{ x = \sum_{j=1}^{K} \lambda_j x_j + \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i d_i \;;\; \sum_{1}^{K} \lambda_j = 1 \,,\; \lambda \geq 0 \,,\, \mu \geq 0 \right\}$$

Assim,

$$\text{PL:}\quad \min_{\lambda,\mu}\ z=\sum_{j=1}^{K}(c^t x_j)\lambda_j+\sum_{i=1}^{\ell}(c^t d_i)\mu_i$$

$$\text{s.a.}\quad \sum_{j=1}^{K}(A_1 x_j)\lambda_j+\sum_{i=1}^{\ell}(A_1 d_i)\mu_i=b_1$$

$$\sum_{j=1}^{K}\lambda_j=1$$

$$\lambda_j\geq 0\ ,\quad j=1,\dots,K$$

$$\mu_i\geq 0\ ,\quad i=1,\dots,\ell .$$

O PL anterior é chamado problema mestre. Observe que este PL está nas variáveis $\lambda, \mu$, e a matriz dos coeficientes é

$$M = \begin{bmatrix} A_1 x_1 & \cdots & A_1 x_k & A_1 d_1 & \cdots & A_1 d_\ell \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} . \quad \Big\} \, m_1 + 1 \text{ linhas}$$

Note que as restrições $A_2 x = b_2$ não estão mais presentes explicitamente. Por outro lado, não conhecemos $x_1, \ldots, x_k$, $d_1, \ldots, d_\ell$ ...

Vamos pensar em resolver o problema mestre via Simplex. Para tanto, devemos calcular bases. Uma matriz básica associada à uma solução básica viável é uma matriz $B$ inversível $(m_1+1)\times(m_1\times 1)$ cujas colunas são

$$\begin{bmatrix} Ax_j \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e/ou} \quad \begin{bmatrix} Ad_i \\ 0 \end{bmatrix},$$

e $B^{-1}\begin{bmatrix} b_1 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0$.

De fato, note que as restrições do problema mestre, na forma padrão, são

$$M \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 1 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \geq 0 .$$

Então precisamos computar pontos extremos $x_j$ e direções extremas $d_i$ que participam da base do Simplex.

↳ computar todos $x_j$ e $d_i$ é impraticável !!!

Além disso, computar todos os pontos / direções extremas pode ser inútil, pois sabemos que o método Simplex geralmente percorre poucos vértices até convergir...

O que seria razoável fazer?

→ computar $x_j$ ou $d_i$ por demanda, isto é, quando já sabemos qual coluna entra na base!

O método de <u>geração de colunas</u> calcula uma coluna $\begin{bmatrix} A_1 x_j \\ 1 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} A_1 d_i \\ 0 \end{bmatrix}$ que entrará na base Simplex do problema mestre, através de um <u>problema auxiliar</u>, <u>sem explicitamente calcular todas as colunas.</u>

Esta estratégia é razoável desde que poucas colunas precisarem ser computadas.

Seja

$$B = \begin{bmatrix} A_1 x_{B_1} & \cdots & A_1 x_{B_p} & A_1 d_{B_{p+1}} & \cdots & A d_{B_{m_1+1}} \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

uma base associada à uma solução básica viável do problema mestre

$$PL: \min_{\lambda,\mu} \; \bar{C}^t \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$$

$$\text{s.a. } M \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \geq 0.$$

Aqui, $\bar{c}_j = c_j^t x_j$ ou $\bar{c}_j = c_j^t d_1$ são os custos.

- custos básicos:

$$\bar{c}_B = \left[\bar{c}_{B_1} \cdots \bar{c}_{B_{m_1+1}}\right]^t$$

$$= \left[c^t x_{B_1} \cdots c^t x_{B_p} \;\; c^t d_{B_{p+1}} \cdots c^t d_{B_{m_1+1}}\right]^t.$$

- custos não básicos:

$$\bar{c}_j = c^t x_j \quad \text{ou} \quad \bar{c}_j = c^t d_j \qquad , \; j \in R.$$

- Para $j \in R$, $\bar{z}_j = \bar{c}_B^t B^{-1} \begin{bmatrix} A_1 x_j \\ 1 \end{bmatrix}$ ou $\bar{c}_B^t B^{-1} \begin{bmatrix} A_1 d_j \\ 0 \end{bmatrix}$.

Para decidir se $B$ é ótima, devemos verificar se

$$\bar{z}_j - \bar{c}_j \leq 0, \quad \forall j \in R.$$

Porém, <u>não</u> queremos computar $x_j$ ou $d_j$, $j \in R$, explicitamente! (pelo menos antes de decidir quem entra na base).

Escrevemos $\bar{c}_B^t B^{-1} = [u_1^t \;\; u_0]$, $u_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$ e $u_0 \in \mathbb{R}$. Assim

$$\bullet\ \bar{z}_j - \bar{c}_j = \bar{c}_B^t B^{-1} \begin{bmatrix} A_1 x_j \\ 1 \end{bmatrix} - c^t x_j = [u_1^t \;\; u_0] \begin{bmatrix} A_1 x_j \\ 1 \end{bmatrix} - c^t x_j$$

$$= (u_1^t A_1 - c^t) x_j + u_0$$

ou

$$\bullet\ \bar{z}_j - \bar{c}_j = \bar{c}_B^t B^{-1} \begin{bmatrix} A_1 d_j \\ 0 \end{bmatrix} - c^t x_j = (u_1^t A_1 - c^t) d_j$$

Note que $u_1$ e $u_0$ são conhecidos do problema mestre. Então, para decidir se B é ótima podemos verificar se

- $\max\limits_{j=1,\dots,k} (A_1^t u_1 - c)^t x_j + u_0 \leq 0$ ;

- $\max\limits_{i=1,\dots,l} (A_1^t u_1 - c)^t d_i \leq 0$ .

Combinando as inequações acima, obtemos

$$\max_{\substack{\lambda,\mu \geq 0 \\ \sum \lambda_j = 1}} (A_1^t u_1 - c)^t \left[\sum_j \lambda_j x_j + \sum_i \mu_i d_i\right] + \sum_j \lambda_j u_0 \leq 0$$

Lembrando que $x_1, \dots, x_K$, $d_1, \dots, d_\ell$ são pontos / direções extremas de

$$X = \{ x \,;\, A_2 x = b_2 \,,\, x \geq 0 \},$$

o problema anterior é equivalente à

$$(PA) \quad \max_x \, (A_1^t u_1 - c)^t x + u_0$$

$$\text{s.a.} \quad A_2 x = b_2 \,, \quad x \geq 0 .$$

Este é o <u>problema auxiliar</u> (<u>pricing problem</u>)

Resolvendo o problema auxiliar pelo Simplex, três casos podem ocorrer:

1) Verificar que (PA) é ilimitado. Neste caso, teremos encontrado uma direção extrema $d$ de $X$ tal que $(A_1^t u_1 - c)^t d > 0$. Assim, a coluna $\begin{bmatrix} A_1 d \\ 0 \end{bmatrix}$ entra na base do problema mestre.

16

2) obter uma solução básica viável <u>ótima</u> $x$ (vértice de $X$) tal que $(A_1^t u_1 - c)^t x + u_0 > 0$. Assim, a coluna $\begin{bmatrix} A_1 x \\ 1 \end{bmatrix}$ entra na base do problema mestre.

3) obter uma solução básica viável <u>ótima</u> $x$ (vértice de $X$) tal que $(A_1^t u_1 - c)^t x + u_0 \leq 0$. Neste caso, $B$ é ótima para

o problema mestre. Teremos os vetores $\lambda$ e $\mu$ (variáveis do problema mestre) ótimos associados à B. Com eles, recuperamos a solução ótima do PL original fazendo

$$x = \sum_j \lambda_j x_j + \sum_i \mu_i d_i .$$

(aqui, $x_j$'s e $d_i$'s são associados à base B ótima, e estarão calculados).

Observações:

(i) decidido quem entra na base do problema mestre (e computada a coluna), a decisão de quem sai da base é a padrão:

$\lambda_{B_r}$ ou $\mu_{B_r}$ que satisfaz

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{y}_{rj}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{y}_{ij}}\ ;\ \bar{y}_{ij} > 0\right\},$$

onde $\bar{b} = B^{-1}\begin{bmatrix} b_1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\bar{y}_j = B^{-1}\begin{bmatrix} A_1 x_j \\ 1 \end{bmatrix}$ ou $B^{-1}\begin{bmatrix} A_1 d_j \\ 0 \end{bmatrix}$.

(ii) se não houver candidatos a sair, a conclusão é a padrão: problema mestre ilimitado, e logo PL ilimitado.

---

EXERCÍCIO: Resolver

$$\min \; z = x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 6x_5$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.}\quad & x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ & 4x_1 + x_2 - x_5 = 8 \\ & x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \end{aligned}$$

por geração de colunas (veja livro Maculan/Fampa)

(iii) Veja que as restrições do problema auxiliar são $A_2 x = b_2$, $x \geq 0$, e devemos resolver vários desses problemas. Então:

- a técnica é adequada quando $A_2 x = b_2$ é simples (por exemplo, separável).

Uma situação comum e muito adequada para esta técnica é quando $A_2 x_2 = b_2$ é separável e $A_1 x_1 = b_1$ são restrições simples que acoplam os vários blocos separáveis:

$$
\begin{array}{l}
\text{acopla}\left[\;
\begin{array}{cccccccc}
A_{11}x^1 & + & A_{12}x^2 & + & A_{13}x^3 & + \cdots + & A_{1K}x^K & \le b_1
\end{array}\right.
\\[2ex]
\text{blocos } x^1,\dots,x^K \left[\;
\begin{array}{cccccccc}
A_{21}x^1 & & & & & & & \le b_{21} \\
& & A_{22}x^2 & & & & & \le b_{22} \\
& & & & A_{23}x^3 & & & \le b_{23} \\
& & & & & \ddots & & \vdots \\
& & & & & & A_{2K}x^K & \le b_{2K}
\end{array}\right.
\end{array}
$$

Problema auxiliar é separável (+ fáceis).

- a cada iteração do método de geração de colunas, uma nova coluna é requerida via resolução do problema auxiliar. As restrições do problema auxiliar são sempre $A_2 x = b_2$, $x \geq 0$, o que muda é a função objetivo. Portanto deve-se aproveitar a otimização feita na iteração anterior, reotimizando com poucas iterações primal Simplex. 22

- necessitamos iniciar uma base do problema mestre. Isso se faz da forma usual, isto é, via método de duas fases. Na fase I, testamos inclusive se PL é viável.

- o vetor $\bar{c}_B^t B^{-1} = [u_1^t \; u_0]$, necessário para construir a F.O. do problema auxiliar, é o vetor de variáveis duais (multiplicadores) associados à base B. Geralmente os resolvedores fornecem este vetor, pois ele

está disponível no próprio método Simplex 24
(tanto primal Simplex quanto dual e Simplex
revisado). Portanto, ao usar um software
que retorna este vetor, não é necessário
calculá-lo separadamente.