Cutting stock (problema de "corte de estoque") 1
(via geração de colunas)

O problema:

Uma empresa dispõe de rolos/bobinas de papel de comprimento $W \gg 1$ (metros, centímetros, etc).
Clientes demandam pedaços menores de papel:

- larguras demandadas: $w_1, \ldots, w_m$ $(\leq W)$
- quantidade de pedaços de largura w_i demandadas: d_i, $i = 1, \ldots, m$.

• <u>objetivo</u>: atender todos os clientes/demandas usando menos bobinas possíveis.

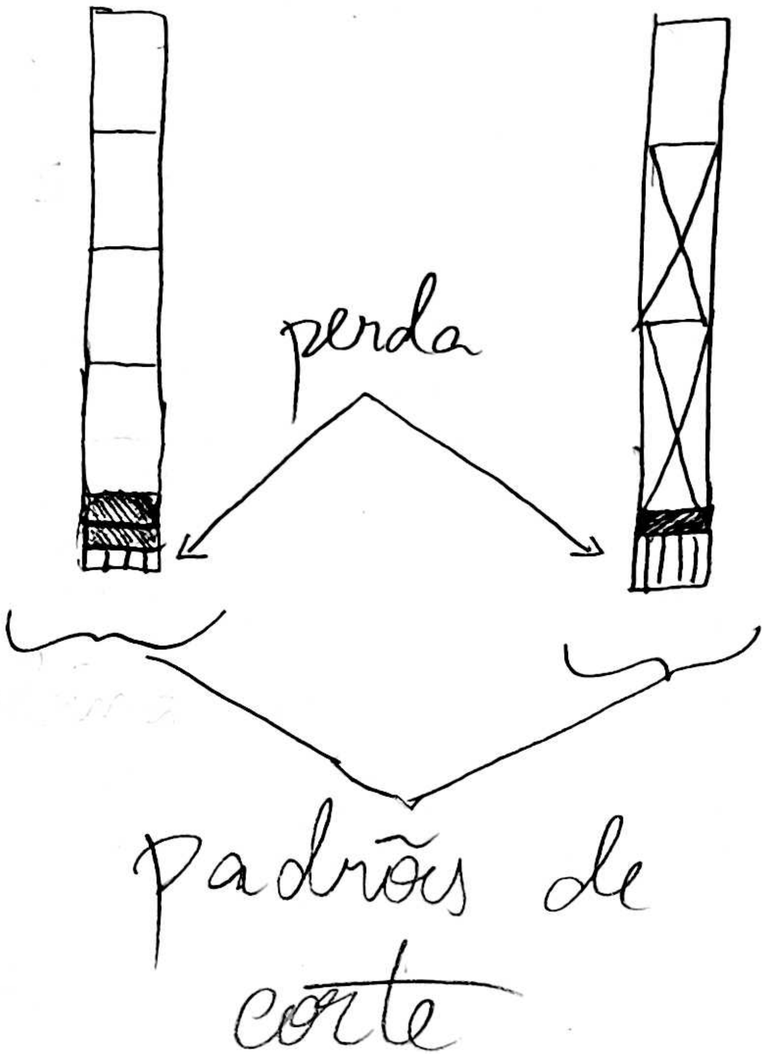
<u>Exemplo</u>: é demandado

□ 5 pedaços de 10 cm

⊠ 2 pedaços de 15 cm

▩ 3 pedaços de 2 cm.

$W = 45$



2 bobinas, com

2 padrões de corte:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde

$$a_i = \begin{bmatrix} \text{nº de pedaços } 10\text{ cm} \\ \text{'' } 15\text{ cm} \\ \text{'' } 2\text{ cm} \end{bmatrix}$$

• note que a ordem de corte dos pedaços em uma bobina não importa, e logo o padrão de corte da forma a_i está bem definido.

• Note que a quantidade de bobinas utilizadas é a mesma de padrões "completos" utilizados, isto é, aqueles que aproveitam toda a bobina.

Assim, podemos pensar que cada vez que um padrão é utilizado, uma nova bobina é usada.

Formulação

- $a_1, a_2, \dots, a_n$ <u>todos</u> os padrões possíveis (note que há uma quantidade enorme — combinatorial — deles!)
- x_j = nº bobinas cortadas no padrão a_j.

$$\min_x \sum_{j=1}^{n} x_j \qquad \text{(min. nº bobinas)}$$

$$\text{s.a.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq d_i \quad , \quad i = 1, \dots, m \text{ (demandas)}$$

$$\left.\begin{aligned} x_j &\geq 0 \quad , \quad j = 1, \dots, n \\ x_j &\in \mathbb{Z} \quad , \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}\right\} \text{(\# padrão } a_j \text{)}.$$

Este problema tem <u>muitas colunas</u>!

↳ vamos gerá-las por demanda!

Como caracterizar um padrão a_j?

- $a_{ij} \in \mathbb{Z}_+$ (as entradas de a_j são quantid.)
- não pode ultrapassar o comprimento W da bobina:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \leq W.$$

- qual padrão gerar?
  ↳ o melhor para entrar na base do prob. principal (geração de colunas).

a_{ij} = nº de pedaços de tamanho w_i no padrão a_j.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \rightarrow \begin{array}{c} a_1 \\ \begin{bmatrix}\vdots\\ a_{i1}\\ \vdots\end{bmatrix}\end{array} x_1 + \cdots + \begin{array}{c} a_j \\ \begin{bmatrix}\vdots\\ a_{ij}\\ \vdots\end{bmatrix}\end{array} x_j + \cdots + \begin{array}{c} a_n \\ \begin{bmatrix}\vdots\\ a_{in}\\ \vdots\end{bmatrix}\end{array} x_n \geq \begin{bmatrix}\vdots\\ d_i\\ \vdots\end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \leq W$$

O método de geração de colunas é aplicado à <u>relaxação linear</u> do problema original:

$$\min_x \sum_{j=1}^{n} x_j \quad \text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \overset{(*)}{=} d_i \,, \; \forall i,$$

$$x_j \geq 0 \,, \; \forall j.$$

<u>Obs</u>: em (*) deveria ser $\geq$, mas não faz diferença pois se x_j pode ser fracionário, ocorre $=$ na otimalidade. A vantagem de usar $=$ é que não inserimos folgas.

<u>Problema mestre (reduzido)</u>: problema com apenas algumas colunas a_j, $j \in \mathcal{J}$.

$$\min_x \sum_{j \in \mathcal{J}} x_j \quad \text{s.a.} \quad \sum_{j \in \mathcal{J}} a_{ij} x_j = d_i \ , \quad i = 1, \dots, m$$
$$x_j \geq 0 \ , \quad j \in \mathcal{J}.$$

<u>Inicialização</u>: escolher $\mathcal{J} = \{1, \dots, m\}$ e $a_j = e_j$ (canônico do $\mathbb{R}^m$). Assim a base inicial é $B = I_m$.

Problema auxiliar (geração dos a_j's)

- $z_j - c_j = c_B^t B^{-1} a_j - 1 = u^t a_j - 1$, onde $u^t = c_B^t B^{-1}$. Este vetor u está disponível no quadro simplex do problema mestre, e é fornecido pelos softwares.

Assim, o problema auxiliar é

$$\max_a \sum_{i=1}^{m} u_i a_i - 1 \quad \text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^{m} w_i a_i \le W, \quad a_i \in \mathbb{Z}_+, \forall i$$

Observações:

1) o prob. auxiliar, apesar de ter variáveis inteiras, é pequeno e pode ser resolvido eficientemente (= problema da mochila).

2) as restrições do prob. auxiliar não mudam, somente a F.O. Assim, não é necessário resolvê-lo do zero a cada nova coluna (quadro simplex é aproveitado).

3) Como antes, a base do problema mestre formada por colunas geradas será ótima se, e somente se, o valor ótimo do prob. auxiliar for ≤ 0.
$(z_j - c_j \leq 0, \forall j)$.

4) Neste processo, as colunas do problema mestre (padrões de corte) são adicionadas por demanda. Então o problema mestre

aumenta, mas a expectativa é que convirja com poucas colunas.

---

5) Ao resolver a relaxação do problema mestre, podemos obter x_j fracionário. Uma solução barata é tomar

$$x_j^* = \lceil x_j \rceil, \quad \forall j.$$

Aumentar x_j significa talvez usar uma bobina a mais, mas essa estratégia é considerada boa pois aumenta, no máximo, m bobinas (há m x_j's na base, potencialmente positivos).