Relaxação Lagrangiana

P: $\min\limits_{x} c^t x$ s.a. $Ax = b$, $Dx \leq e$, $x \in \mathbb{Z}^n_+$.

Situação de interesse: problemas em que, retirando $Ax = b$, são fáceis de resolver (apesar de mantermos $x \in \mathbb{Z}^n_+$).

O que fazer?

↳ penalizar $Ax = b$ na F.O.

$$P(u): \min_x \; c^t x + u^t(Ax - b)$$
$$\text{s.a. } Dx \leq e \;, \; x \in \mathbb{Z}^n_+ .$$

- $L(x,u) = c^t x + u^t(Ax - b)$ é chamada <u>função lagrangiano</u>.
- u é o vetor de <u>multiplicadores de Lagrange</u> (relativos à $Ax - b = 0$).

Vamos supor que $P(u)$ seja fácil de resolver, para cada u fixado, em relação à P.

<u>Objetivo</u>: "resolver" P através de P(u)

Sejam

$$f^* = \min_x \{ c^t x \, ; \, Ax = b, \, Dx \leq e, \, x \in \mathbb{Z}^n_+ \}$$

e

$$L^*(u) = \min_x \{ c^t x + u^t (Ax - b) \, ; \, Dx \leq e, \, x \in \mathbb{Z}^n_+ \}$$

os valores ótimos de P e P(u), respect.

<u>Teorema</u>: $L^*(u) \leq f^*$, $\forall u$.

<u>Prova</u>: $L^*(u) \leq c^t x^* + u^t \underbrace{(Ax^* - b)}_{0} = f^*$, onde x^* é ótimo de P. ▨

Ou seja, $P(u)$ fornece limitantes inferiores para f^*. Chamamos $P(u)$ de <u>relaxação lagrangiana</u> de P (de fato é uma).

↳ o ideal é encontrar u tal que $L^*(u) = f^*$. Mesmo não sendo possível, queremos $\max_u L^*(u)$.

↳ o limitante $L^*(u) \leq f^*$ pode ser usado em um branch-and-bound.

Em determinados problemas, um problema do tipo $P(u)$ fornece limitantes melhores que a relaxação linear usual (a obtida trocando $x \in \mathbb{Z}_+^n$ por $x \geq 0$). 5

Vale notar que um branch-and-bound com $P(u)$ nos nós só será eficiente se $P(u)$ for fácil.

Podemos usar $P(u)$ em alguns nós e a relaxação linear em outros.

Exemplo 1: GAP - Generalized Assignment Prob.

$$P: \min_{x} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad , \; j=1,\dots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leq b_i \quad , \; i=1,\dots,m$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad , \; \forall i,j.$$

Penalizando (ou "dualizando") $\sum_i x_{ij} - 1 = 0$:

$$P_1(u): \min_x \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} u_j \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - 1 \right)$$

$$\text{s.a.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leq b_i \quad , \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad , \quad \forall i, j.$$

A F.O. pode ser escrita como $\sum_i \sum_j (c_{ij} + u_j) x_{ij} - \sum_{j}^{n} u_j$.

Este problema tem uma estrutura separável,
e é equivalente à resolver m problemas

$$\min_x \sum_j (c_{ij} + u_j)\, x_{ij}$$

$$\text{s.a.} \sum_j a_{ij} x_{ij} \leq b_i \ , \quad x_{ij} \in \{0,1\}, \forall j,$$

Agora, podemos penalizar $\sum_j a_{ij} x_{ij} \leq b_i$ ao invés das restrições de igualdade. Neste caso, o parâmetro de penalização v é ≥ 0:

$$P_2(v): \min_x \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \sum_i v_i \left(\sum_j a_{ij} x_{ij} - b_i \right)$$

$$\text{s.a.} \sum_i x_{ij} = 1, \forall j, \quad x_{ij} \in \{0,1\}, \forall i,j.$$

Este problema tem solução <u>trivial</u>: basta fazer $x_{ij} = 1$ quando $c_{ij} + v_i a_{ij} = \min_i \{c_{ij} + v_i a_{ij}\}$ e

$x_{ij} = 0$ caso contrário.

<u>Uma observação</u>: porque $v \geq 0$ para restrições de desigualdade?

Lembre-se da otimalidade (<u>dualidade</u> /KKT):

$$L(x, u, v) = c^t x + u^t(Ax - b) + v^t(Dx - e)$$

$$\nabla_x L(x, u, v) = c + A^t u + D^t v = 0 \quad , \boxed{v \geq 0}$$

(...)

Com isso, mantemos

$$L^*(u, v) \leq f^* \quad \text{(verifique!)}$$

Pergunta: como $L^*(u) \leq f^*$ para qualquer u, como escolher um bom u?

↳ o ideal é aquele que maximiza L^*, isto é, devemos resolver o problema

$$D: \max_u L^*(u).$$

Lembre-se que

$$L^*(u) = \min_x \{ c^t x + u^t (Ax - b) ; Dx \leq e, \; x \in \mathbb{Z}^n_+ \}.$$

Assim,

$$D: \max_{u} \min_{x} \{ c^t x + u^t(Ax-b) ; Dx \leq e, x \in \mathbb{Z}_+^n \}$$

Este é exatamente o problema dual de P ao dualizarmos as restrições $Ax - b = 0$. (veja dualidade em PNL – "Otimização II")

Da mesma forma,

$$\max_{v \geq 0} \min_{x} \{ c^t x + v^t(Dx-e) ; Ax = b, x \in \mathbb{Z}_+^n \}$$

De fato, tudo o que vimos pode ser obtido por dualidade. Note que $L^*(u) \leq f^*$ é o teorema de dualidade fraca...

Neste sentido, poderia-se perguntar: vale dualidade forte ($\max_u L^*(u) = f^*$)?

↳ <u>Nem sempre</u>, pois as restrições de integralidade $x \in \mathbb{Z}^n$ tornam P não convexo. Às vezes $\max_u L^*(u)$ só alcança o valor ótimo da relaxação linear de P.

Um fato importante é que o problema
$D: \max_u L^*(u)$ nunca fornece um limitante
pior que a relaxação linear!

- P_{relax}: $f^*_{relax} = \min_x \{ c^t x \; ; \; Ax = b, \; Dx \leq e, \; x \geq 0 \}$

Teorema: $\max_u L^*(u) \geq f^*_{relax}$.

Prova: ver Teorema 10.1 do livro de Wolsey. ∎

Obs: resultado análogo vale ao dualizar $Dx \leq e$.